Реакционно-диффузионная динамика в открытых квантовых системах и обобщенное уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова

А.А. Люблинская и И.С. Бурмистров

Классическое уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова [1, 2] имеет вид (в одном пространственном измерении)

$$\Big(\partial_t - D\partial_x^2 - \gamma + \beta n\Big) n = 0. \tag{1}$$

Оно включает себя несколько эффектов динамики и распространения концентрации частиц $n(x,t) \geqslant 0$: первые два члена описывают диффузионное распространение с коэффициентов диффузии D, рост концентрации с постоянной скоростью $\gamma > 0$ и рекомбинацию с темпом $\beta > 0$. Кратко историю этого знаменитого уравнения можно посмотреть здесь: `https://en.wikipedia.org/wiki/KPPвЃYFisher_equation`. Это уравнение встречается не только в классических задачах, но и в задачах, связанных с динамикой квантовых систем [3–7].

Важной особенностью уравнения (1) является (i) наличие двух однородных и постоянных во времени решений: неустойчивого решения $n = 0$ и устойчивого решения $n = \gamma/\beta$, (ii) смена диффузионного распространения, $x \sim \sqrt{t}$ на малых временах t на баллистическое распространение, $x \sim t$ на больших временах.

Недавно [8], в задаче о диссипативной двухзонной фермионной системе было получено обобщение уравнения ФКПП:

$$\begin{aligned} &\Big(\partial_t - D^{(\mathsf{u})}\partial_x^2 - \gamma_{\mathsf{u}} - \beta n_{\mathsf{d}}\Big) n_{\mathsf{u}} + \gamma_{\mathsf{d}} n_{\mathsf{d}} = 0, \\ &\Big(\partial_t - D^{(\mathsf{d})}\partial_x^2 - \gamma_{\mathsf{d}} + \beta n_{\mathsf{u}}\Big) n_{\mathsf{d}} + \gamma_{\mathsf{u}} n_{\mathsf{u}} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\gamma_{\mathsf{u,d}} > 0$ и $\beta > 0$. Эта система уравнений имеет все свойства стандартного уравнения ФКПП, однако ранее почти не анализировалась. Примеры зависимостей $n_{\mathsf{u,d}}$ можно посмотреть на Рис. 9 по ссылке `http://home.itp.ac.ru/~burmi/MyPubs/2025/PhysRevB.111.094302.pdf`.

Задача состоит в анализе ур. (2), как численном так и аналитическом.

Предварительно можно попробовать обезразмерить уравнение (1) и порешать его численно (например, в Mathematica), задавая разные начальные значения для $n(x, t = 0)$.

---

[1] R. A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, Ann. Eugen. **7**, 355 (1937).
[2] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piscounov, Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biological problem, Bull. State Univ. Mosc. **1**, 1 (1937).
[3] W. van Saarloos, Front propagation into unstable states: Marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection, Phys. Rev. A **37**, 211 (1988).
[4] É. Brunet and B. Derrida, An exactly solvable travelling wave equation in the Fisher–KPP class, J. Stat. Phys. **161**, 801 (2015).
[5] B. Derrida and H. Spohn, Polymers on disordered trees, spin glasses, and traveling waves, J. Stat. Phys. **51**, 817 (1988).
[6] I. L. Aleiner, L. Faoro, and L. B. Ioffe, Microscopic model of quantum butterfly effect: Out-of-time-order correlators and traveling combustion waves, Ann. Phys. (N.Y.) **375**, 378 (2016).
[7] T. Zhou, A. Guo, S. Xu, X. Chen, and B. Swingle, Hydrodynamic theory of scrambling in chaotic long-range interacting systems, Phys. Rev. B **107**, 014201 (2023).
[8] A. A. Lyublinskaya, P. A. Nosov, and I. S. Burmistrov, Instability of the engineered dark state in two-band fermions under number-conserving dissipative dynamics, Phys. Rev. B **111**, 094302 (2025).