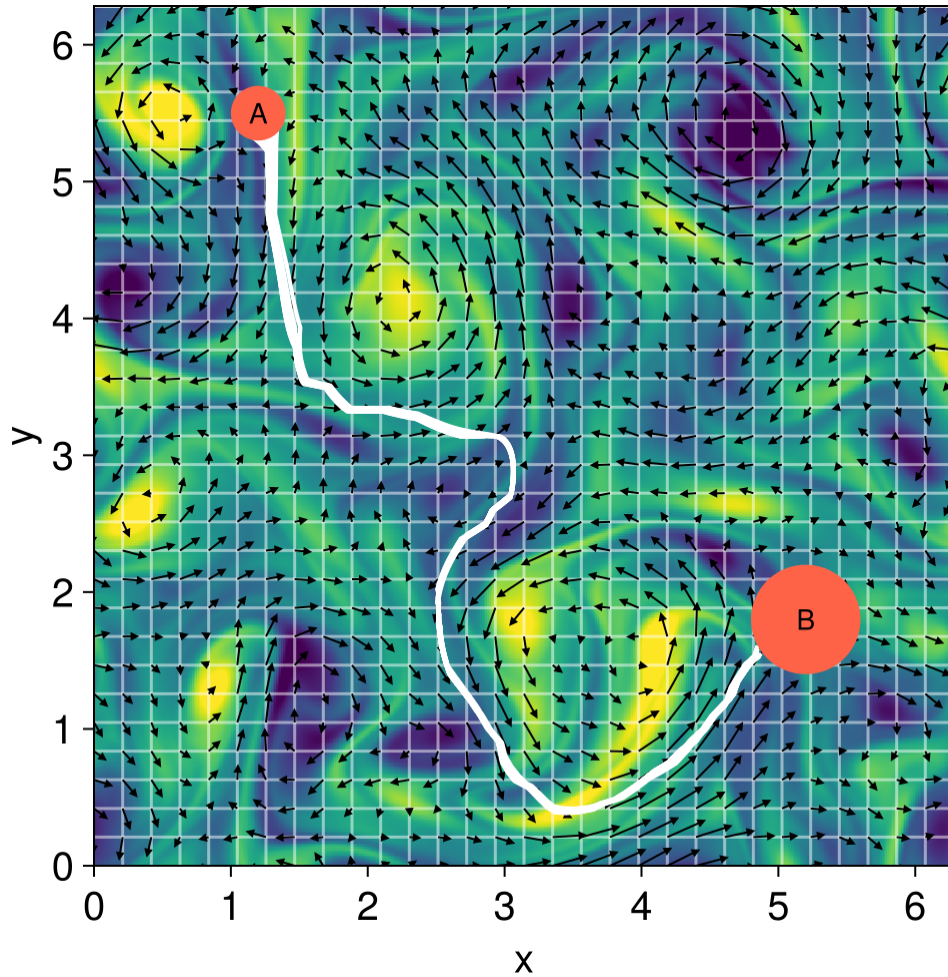


Оптимальная навигация в регулярных и турбулентных двумерных потоках



В данном проекте мы будем исследовать движение агента, находящегося во внешнем двумерном поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и перемещающегося в соответствии с уравнением

$$\frac{d\mathbf{X}_t}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}_t, t) + V_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_t \\ \sin \theta_t \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{X}_t$ — положение агента в момент времени t . Перемещение в пространстве происходит за счёт переноса внешним течением и благодаря собственной активности. Агент движется относительно внешнего течения с постоянной скоростью V_0 и самостоятельно выбирает направление своего движения θ_t . Задача состоит в нахождении зависимости $\theta_t = \theta(\mathbf{X}_t)$, которая позволяет добраться из точки $\mathbf{x}_A$ в точку $\mathbf{x}_B$ за кратчайшее время. Впервые эта задача возникла в контексте воздухоплавания дирижаблей, и она известна в литературе как [Zermelo's navigation problem](#).

Из общих соображений ясно, что если собственная скорость агента V_0 велика по сравнению с характерной скоростью течения, то тривиальная стратегия выбирать угол θ_t так, чтобы собственная скорость всегда была направлена в конечную точку, близка к оптимальной. Наибольший интерес задача приобретает в противоположном случае, когда внешнее течение оказывает существенное влияние на движение агента. В рамках теории контроля можно показать, что если нам удалось найти оптимальную траекторию, то вдоль нее должно выполняться уравнение

$$d\theta_t/dt = A_{21} \sin^2 \theta_t - A_{12} \cos^2 \theta_t + (A_{11} - A_{22}) \cos \theta_t \sin \theta_t, \quad (2)$$

где $A_{ij} = \partial_j v_i(\mathbf{X}_t)$ – градиенты скорости внешнего течения, вычисленные вдоль траектории агента. Проблема состоит в том, что начальное условие к этому уравнению остается неизвестным. С практической точки зрения его можно решать методом стрельбы: перебирать все возможные начальные условия и выбирать траектории, которые приходят в точку $\mathbf{x}_B$. В рамках проекта предлагается реализовать данный метод и исследовать полученные решения на устойчивость для различных конфигураций внешнего поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Ожидается, что метод будет неплохо работать для простых распределений скорости и станет неустойчивым для турбулентных течений.

В случае турбулентных течений можно попробовать найти квази-оптимальные устойчивые траектории с помощью алгоритмов [машинного обучения с подкреплением](#). Например, можно применить алгоритм [Q-learning](#) из класса action-value методов, либо алгоритм [One-step Actor-Critic](#) из класса policy-gradient методов. Найденные квази-оптимальные решения будет интересно сравнить с оптимальными решениями из предыдущего пункта для различных конфигураций скорости потока. В дальнейшем было бы интересно исследовать как алгоритмы машинного обучения справляются с ситуацией, когда мы обладаем неполной информацией о внешнем поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ из-за сложностей с прогнозированием мелко-масштабных турбулентных флуктуаций, но работа в этом направлении выходит за рамки летнего проекта.

Литература

Предлагаемый проект основан на работе [1] и задуман как расширение этого исследования. В качестве введения в теорию контроля можно рекомендовать разделы 1.1–1.3 из книги [2]. Уравнение (2) можно получить, если обобщить рассмотрение навигационной задачи Цермело на нестационарные течения в соответствии с разделом 2.7 книги [3]. В качестве введения в машинное обучение с подкреплением рекомендую классический учебник [4].