

I. Полиномы Лагерра

Для полиномов Лагерра существует следующее представление в виде контурного интеграла

$$L_n^\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} e^z z^{-\alpha} \oint \frac{e^{-t}}{(t-z)^{n+1}} t^{n+\alpha} dt \quad (1)$$

Здесь n - степень полинома, а α - произвольный действительный параметр, контур интегрирования в плоскости t проходит против часовой стрелки вокруг точки z . Используя метод перевала, найти асимптотику полиномов Лагерра при $n \rightarrow \infty$. Для удобства считайте z действительным и положительным.

a. У вас должны получиться 2 седловые точки. Ваши вторые производные, определяющие предэкспоненту, должны получиться равными

$$S''(t_{\pm}) = \pm \frac{2i}{\sqrt{zn}}$$

b. Для получения правильного выражения в экспоненте удобно использовать представление

$$t = |t| e^{i \arg t}$$

У вас должно получиться

$$|t_{\pm} - z| = \sqrt{z(n+1)},$$
$$\arg(t_{\pm} - z) = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\alpha - 1 - z}{2\sqrt{nz}}.$$

и похожие выражения для t .

II. Функции Бесселя

На семинаре мы исследовали асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях аргумента $z \rightarrow \infty$. Используя представление контурным интегралом

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} \frac{dt}{t^{n+1}}, \quad (2)$$

где замкнутый контур обходит точку 0 против часовой стрелки, получить асимптотическое представление функции Бесселя при больших значениях номера $n \rightarrow \infty$. Считайте z действительным и положительным.

c. У вас должны получиться 2 седловые точки. Одну из них следует исключить из рассмотрения. Почему?

d. Для получения табличного ответа, приведенного в конце задания, вам возможно окажется полезной формула Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

III. Асимптотика интеграла

Найти асимптотику интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-1}^{\infty} e^{-\lambda \sqrt{\frac{x^2}{1+x}}} dx \quad (4)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$. Фазовая функция имеет излом на отрезке интегрирования. Разбейте контур на 2 части и для каждого интеграла получите свою асимптотическую оценку.

IV. Уравнения

Используя метод контурного интеграла Лапласа построить все линейно-независимые решения уравнения. В случае, когда интеграл не вычисляется в элементарных функциях, найти его асимптотику при $z \rightarrow +\infty$

1.

$$zu'' + (z + 2i)u = 0 \quad (5)$$

2. *

$$3zu'' - 2u' + (-3z + 4)u = 0 \quad (6)$$

V. Ответы

$$1. L_n^\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{z}{2}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} z^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nz} - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2. J_n(z) = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

$$3. F(\lambda) \approx \frac{2}{\lambda}$$

$$4a. u_1(z) = ze^{-iz}, \quad u_2(z) = \int_{-\infty}^i e^{zt} \frac{dt}{(t+i)^2} \rightarrow -\frac{e^{iz}}{4z},$$

$$4b. u_1(z) = (2 + 3z)e^{-z},$$

$$u_2(z) = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{zt} dt}{(t+1)^2(t-1)^{2/3}} \rightarrow -\frac{e^z}{4z^{1/3}} e^{-2\pi i/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$