Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 5, стр. 216 – 218 *10 марта 1985 г.*

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСЩЕПЛЕНИЯ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ДВУМЕРНОЙ XY-МОДЕЛИ

С.Е.Коршунов

Показано, что изменение вида взаимодействия в двумерной XY-модели может привести к изменению характера фазового перехода и даже к расщеплению его на два, один из которых, например, изинговского типа. Такое явление может иметь место в тонких пленках сверхтекучего ^{3}He-A.

Обладающий симметрией $O(2)$ гамильтониан XY-модели имеет вид

$$H = \sum_{(jl)} V(\varphi_j - \varphi_l); \qquad V(\Delta\varphi) \equiv - V_0 \cos(\Delta\varphi), \tag{1}$$

где суммирование ведется по парам ближайших соседей на плоской решетке, а переменные φ_j определены на кольце $-\pi \leqslant \varphi_j \leqslant \pi$. В модели (1) происходит фазовый переход между фазами со степенным и с экспоненциальным спаданием коррелятора $\langle \exp i(\varphi_j - \varphi_l) \rangle$ [1]. Этот переход связан с диссоциацией пар вихрей и по классификации Эренфеста является переходом бесконечного рода [1].

Рассмотрим модификацию XY-модели, в которой $V(\Delta\varphi)$ представляет собой четную периодическую функцию $\Delta\varphi$, имеющую при $\Delta\varphi = \pi$ еще один минимум почти той же глубины, что и основной минимум, расположенный при $\Delta\varphi = 0$ (см. рис. 1). Экстремумами гамильтониана, дающими вклад в статсумму, являются в этом случае не только вихри и вихревые пары, но также и солитоны – линейные особенности, на которых φ меняется на π. Солитоны могут быть замкнуты, а могут оканчиваться на вихрях с циркуляцией $\pm\pi$ (полувихрях).

Энергия солитона на единицу длины равна разности V_1 глубины минимумов функции $V(\Delta\varphi)$. При $V_1 \sim T$ свободная энергия на единицу длины солитона обращается в ноль. При более высокой температуре коррелятор $< \exp i(\varphi_j - \varphi_l) >$ спадает экспоненциальным образом, поскольку удаленные точки j и l оказываются разделены большим числом солитонов, на каждом из которых φ скачет на π. Коррелятор $<\exp[2i(\varphi_j - \varphi_l)]>$ при этом, тем не менее, спадает степенным образом, поскольку при $T \ll V_2$ в системе сохраняется изгибная жесткость. Таким образом, при $V_1 \ll T \ll V_2$ система находится в промежуточной фазе, в которой спонтанно нарушенная симметрия по отношению к группе двумерных вращений оказывается частично восстановленной (для вращений, отличающихся на угол π). Переход между промежуточной и низкотемпературной фазами связан с нарушением группы Z_2, хотя из-за отсутствия строгого дальнего порядка по φ нельзя выделить переменную изинговского типа, по которой происходит упорядочение.

Отметим, что хотя солитоны и не являются топологически неустранимыми особенностями (так как они могут оканчиваться на полувихрях), при $V_1 \ll T \ll V_2$ их свободные концы оказываются связаны сильным логарифмическим взаимодействием в пары малого размера, расположенные далеко друг от друга. На масштабах, превышающих средний размер пары, вряд ли может быть существенно наличие этих маленьких "дырок" в солитонах.

Для того, чтобы более строго обосновать существование промежуточной фазы и перехода изинговского типа, рассмотрим модель, связанную с рассматриваемой модификацией XY-модели дуальным преобразованием [2]. Она представляет собой SOS-модель с гамильтонианом

$$\widetilde{H} = \sum_{(jl)} \widetilde{V}(n_j - n_l), \tag{2}$$

в котором суммирование проводится по парам ближайших соседей на дуальной решетке, а взаимодействие $\widetilde{V}(n_j - n_l)$ целочисленных переменных n_j сильно зависит от четности

$n_j - n_l$. Пусть , например,

$$\widetilde{V}(n_j - n_l) = \frac{J}{2}(n_j - n_l)^2 - \frac{K}{2}\sigma_j\sigma_l; \qquad \sigma_j \equiv \exp i\pi n_j .$$

Случаю $V_1 \ll T \ll V_2$ соответствует $J \ll 1 \ll K$ (температуру считаем включенной в определение $\widetilde{H}$). При $K = \infty$ переменные n_j либо все четные, либо все нечетные. Если при этом $J \ll 1$, то система находится в шероховатом состоянии, т. е. квадрат ширины поверхности расходится, а свободная энергия единицы длины ступени (высоты 2) обращается в ноль. При $1 \ll K < \infty$ становятся возможными доменные стенки между этими двумя шероховатыми "вакуумами". Эти доменные стенки обладают большой энергией на единицу длины K и, следовательно, конечной свободной энергией (энтропия может быть оценена сверху величиной порядка единицы). Существуют лишь маленькие "островки" одного "вакуума" в другом и сохраняется упорядочение по изинговской переменной σ.

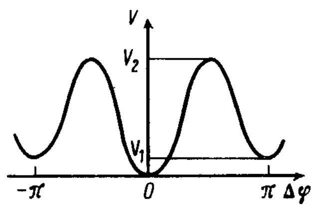

Рис. 1

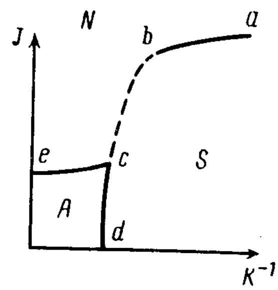

Рис. 2

Конечность свободной энергии ступени единичной высоты на языке исходной XY-модели означает экспоненциальное спадание коррелятора $\langle \exp i(\varphi_j \varphi_l)\rangle$ [3]. Обращение в ноль свободной энергии ступени высоты 2 означает степенное спадание коррелятора $\langle \exp[2i \times (\varphi_j - \varphi_l)]\rangle$. Таким образом, при $J \ll 1 \ll K$ XY-модель, дуальная к (2), находится в промежуточной фазе, описанной выше.

Сохраняя σ_j, как независимые переменные, мы можем стандартным образом [4] преобразовать статсумму модели (2) в статсумму двумерного кулоновского газа:

$$Z = \sum_{\sigma = \pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{K}{2}\sum_{(jj')}\sigma_j\sigma_{j'} - \frac{2\pi^2}{J}\sum_{j,l}\frac{m_j}{2}G_{jl}\frac{m_l}{2} + i\pi\sum_j \sigma_j \frac{m_j}{2}\right\}, \tag{3}$$

где взаимодействие G_{jl} целочисленных зарядов m_j (представляющих собой вихри с циркуляцией πm_j) на больших расстояниях является логарифмическим. При $J \ll 1 \ll K$ заряды связаны в пары, а изинговские переменные σ_j упорядочены. Рассмотрим, к каким последствиям приводит взаимодействие σ и m.

При $J \ll 1$ в (3) можно провести суммирование по m_j, считая, что эти заряды связаны в нейтральные пары, находящиеся далеко друг от друга, взаимодействие которых между собой приводит лишь к перенормировке J. Результатом суммирования является появление дополнительного ферромагнитного взаимодействия переменных σ, спадающего на больших расстояниях как $r^{-\pi/2J_R}$. Если полувихри связаны в пары, то $\pi/2J_R \geqslant 4$ и это дополнительное взаимодействие не может привести к изменению характера изинговского перехода.

Если мы теперь наоборот, рассмотрим влияние изинговских переменных на вихри, то увидим, что к затравочному взаимодействию полувихрей ($m = \pm 1$) добавляется слагаемое $-\ln\langle \sigma_j\sigma_l\rangle$. Если $\langle \sigma_j\rangle \neq 0$, то это эквивалентно лишь уменьшению активности полувихрей, а если $\langle \sigma_j\rangle = 0$, то между полувихрями возникает взаимодействие, пропорциональное расстоянию между ними (т. е. энергия солитона на единицу длины конечна).

Фазовая диаграмма в переменных K^{-1}, J схематически изображена на рис. 2. Через S обозначена упорядоченная фаза XY-модели, через N – неупорядоченная, через A – промежуточная. На линии ab происходит диссоциация пар обычных вихрей, на линии bd – обращение в ноль свободной энергии солитона, на линии ce – диссоциация пар полувихрей. На участке bc при обращении в ноль свободной энергии солитона логарифмическое взаимодействие полувихрей оказывается слишком слабым для того, чтобы они были связаны в пары. Поэтому переход в неупорядоченное состояние в этом случае должен происходить иным, чем на участке ab, образом (т. е. или с другими индексами, или при помощи перехода первого рода).

Физической системой, обладающей свойствами, близкими к рассмотренной модели, является, например, пленка ^{3}He-A в сильном магнитном поле. Если поле строго перпендикулярно пленке, то взаимодействие полувихрей (являющихся в этом случае одновременно и дисклинациями с индексами Франка $\pm 1/2$) является чисто логарифмическим [5], а если слегка наклонить поле, то возникает линейный по расстоянию член, связанный с появлением солитона. При варьировании температуры и наклона поля должна наблюдаться фазовая диаграмма типа изображенной на рис. 2.

Автор благодарен Г.В.Уймину за обсуждение работы.

Литература

1. *Березинский В.Л.* ЖЭТФ, 1970, **59**, 907; 1971, **61**, 1144; *Kosterlitz J.M., Thouless D.* J. Phys., 1973, **C6**, 1181. *Kosterlitz J.M.* J. Phys., 1974, **C7**, 1046.
2. *Jose J.V., Kadanoff L.P., Kirkpatrick S., Nelson D.R.* Phys. Rev., 1977, **B16**, 1217. *Knops H.J.F.* Phys. Rev. Lett., 1977, **39**, 766.
3. *Swendsen R.H.* Phys. Rev., 1978, **B17**, 3710; *van der Eerden J.P., Knops H.J.F.* Phys. Lett., 1978, **66A**, 334.
4. *Chui S.T., Weeks J.D.* Phys. Rev., 1976, **B14**, 4978.
5. *Воловик Г.Е., Саломаа М.М.* ЖЭТФ, 1985, **88**, вып. 5, (в печати)

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 февраля 1985 г