Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 10, стр. 385 – 388 *25 ноября 1987 г.*

КВАНТОВАЯ ДИФФУЗИЯ ВИХРЕЙ В ДВУМЕРНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ

С.Е.Коршунов

Для ряда решеточных квантовых моделей найдены температурные зависимости вероятности межузельного туннелирования вихрей, происходящего в некогерентном режиме. Полученные результаты применимы для описания таких двумерных систем как планарный ферромагнетик, различные решетки туннельных контактов, свободная поверхность квантового кристалла.

Как известно [1], вихри играют определяющую роль в термодинамике двумерных систем с непрерывным вырождением параметра порядка по группе $O(2)$. Отличие низкотемпературной (упорядоченной) фазы от высокотемпературной состоит в том, что в ней отсутствуют свободные (не входящие в состав нейтральных пар) вихри. Влияние вихрей на динамические свойства обеих фаз было исследовано в работах Амбегаокара и др. [2], исходя из предположения, что движение одиночного вихря носит диффузионный характер.

В последнее время активно разворачиваются экспериментальные исследования динамических свойств регулярных двумерных структур, состоящих из связанных туннельными контактами сверхпроводящих элементов (см., например, [3] и цитируемые в ней работы). Несомненный интерес представляет вопрос о характере движения вихрей в таких или иных решеточных системах с непрерывным вырождением, в частности, в контексте возможности сопоставления экспериментальных данных с предсказаниями теории [2]. В настоящей работе исследуется динамика вихрей в упорядоченной фазе для некоторых простых квантовых моделей, допускающих разнообразные применения.

В простейшем приближении регулярная решетка туннельных контактов может быть описана гамильтонианом:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{j}} \frac{J}{2} \hat{n}_{\mathbf{j}}^2 - \sum_{(\mathbf{j}\mathbf{j}')} V\cos(\phi_{\mathbf{j}} - \phi_{\mathbf{j}'}); \; \hat{n}_{\mathbf{j}} \equiv -i \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathbf{j}}}, \tag{1}$$

где $\phi_{\mathbf{j}}$ – фаза $\mathbf{j}$ -той гранулы, $J = 4e^2/C$ (C – емкость гранулы), $V = \hbar I_c/2e$ (I_c – критический ток одиночного контакта), а суммирование в последнем слагаемом проводится по парам ближайших соседей на решетке. Эта же модель описывает планарный ферромагнетик в приближении непрерывного спина. Мы будем рассматривать только случай $V \gg J$, когда квантовые флуктуации малы и при нулевой температуре существует истинный дальний порядок.

Соответствующее вихрю распределение поля ϕ (в котором потенциальная энергия имеет истинный локальный минимум) оказывается центрировано на той или иной ячейке решетки. Перемещение кора вихря в соседнюю ячейку требует преодоления барьера $\Delta V \approx 0,40 V$ [4] и при низких температурах происходит туннельным образом. Попытка исследования межузельного туннелирования вихрей была предпринята ранее Лоббом, Абрагамом и Тинхамом [4], однако эти авторы предполагали, что отличие такого процесса от туннелирования фазы в одиночном контакте сводится лишь к различию в высоте барьера (что неверно) и использовали для одиночного контакта формулу, несправедливую, по крайней мере, в области низких температур.

Точный вид распределения поля ϕ в вихре и на экстремальной траектории во мнимом времени, соответствующей туннелированию вихря между соседними ячейками (такие траектории мы будем называть инстантонами) могут быть найдены, если заменить в (1) потенциал $V(\Delta\phi) = -V\cos(\Delta\phi)$ на периодически продолженную параболу: $V(\Delta\phi) = (V/2)\,min\,\{\Delta\phi - 2\pi p)^2\}$, где p – целое. Например, в случае квадратной решетки (узлы которой соответствуют целочисленным значениям двухкомпонентного индекса $\mathbf{j}$) для вихря с центром в точке (1/2, 1/2) можно взять

$$\phi_{\mathbf{j}} = \Phi_{\mathbf{j}} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \int\!\!\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{\kappa(\mathbf{k})} (e^{-ik_y} - 1) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{j} + k_x m)}; \; \kappa(\mathbf{k}) = 4 - 2\cos k_x - 2\cos k_y .$$

Тогда на траектории, соответствующей туннелированию кора вихря на одну ячейку влево

$$\phi_{\mathbf{j}}(\tau) = \frac{1}{2}(\Phi_{\mathbf{j}} + \Phi_{\mathbf{j}+\mathbf{e}_x}) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int\!\!\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{-i\omega} V G_0(\mathbf{k}\omega)(e^{-ik_y} - 1) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{j} - \omega\tau)},$$

где

$$G_0(\mathbf{k},\omega) = [(\hbar^2/J)\omega^2 + V\kappa(\mathbf{k})]^{-1},$$

а избыточное действие S_1 равно

$$S_1 \equiv S[\phi_{\mathbf{j}}(\tau)] - S[\Phi_{\mathbf{j}}] = \int \frac{d\omega d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \pi^2\hbar^2 (V/J) G_0(\mathbf{k},\omega) \propto \hbar (V/J)^{1/2}. \tag{2}$$

Величина S_1 определяет малость нультемпературной амплитуды перескока $\Delta \propto \exp(-S_1/\hbar)$. Как зависимость $S_1 \propto (V/J)^{1/2}$, так и характер взаимодействия инстантонов (см. ниже) сохраняются и если не производить замены вида потенциала.

В отличие от стандартной задачи о туннелировании фазы в одиночном контакте с гамильтонианом $\hat{H}_0 = (J/2)\hat{n}^2 - V\cos\phi$, в рассматриваемой здесь задаче инстантоны сильно взаимодействуют друг с другом (на больших временах $\Delta S \approx \pm \int \frac{d\omega d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3} 2\pi^2\hbar^2 (V/J) G_0(\mathbf{k},\omega) e^{-i\omega\tau} \propto 1/\tau$).

Такой закон взаимодействия инстантонов уже встречался при анализе задачи о росте квантового кристалла [5,6]. Поскольку в квазиклассическом приближении характеристики туннельных процессов однозначно определяются взаимодействием инстантонов, можно переформулировав полученные ранее результаты [6] сразу заключить, что для $k_B T \gtrsim J$ межузельное туннелирование вихрей представляет собой чисто некогерентный процесс, характеризуемый вероятностью туннелирования w. В температурном интервале $J \ll k_B T \ll (JV)^{1/2}$:

$$w \propto \frac{\Delta^2 J^{1/2}}{\hbar (k_B T)^{3/2}} \exp\left[2\pi(\ln 2) k_B T/J\right], \tag{3}$$

а при $k_B T \sim (JV)^{1/2}$ должен произойти переход на режим активационного туннелирования. Коэффициент диффузии D связан с w тривиальным соотношением: $D = a^2 w$ (a — период решетки).

В рассмотренном нами режиме некогерентного туннелирования учет взаимодействия вихря с другим вихрем (если речь идет о связанной паре), с границами образца, с неоднородностями сводится к домножению (3) на больцмановский фактор, соответствующий диффузионному движению во внешнем потенциале. При $k_B T \ll J$ же оказывается необходимым одновременный учет как частичного восстановления когерентности туннелирования (за счет взаимодействия различных актов туннелирования), так и ее разрушения из-за вызванного различными причинами сбоя уровней в соседних ячейках, что представляет собой несравненно более сложную задачу.

Если каждый из контактов шунтирован нормальным сопротивлением R, т.е. система описывается эвклидовым действием [7]:

$$S = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \left[\sum_{j} (\hbar^2/2J)\dot{\phi}_j^2 - \sum_{(jj')} V\cos(\phi_j - \phi_{j'})\right] + \int_{-\beta/2}^{\beta/2}\int d\tau d\tau' \sum_{(jj')} \frac{\eta\hbar}{4\pi} \left\{\frac{\phi_j(\tau) - \phi_{j'}(\tau) - \phi_j(\tau') + \phi_{j'}(\tau')}{(\beta/\pi)\sin[(\pi/\beta)(\tau - \tau')]}\right\}^2, \tag{4}$$

где $\eta = \hbar/4e^2 R$, $\beta = \hbar/k_B T$, то взаимодействие инстантонов при нулевой температуре оказывается логарифмическим, так же как для одиночного контакта с диссипацией [8]. Воспользовавшись известными свойствами систем с омической диссипацией [9], получим, что при $\eta > 1/\pi$ межузельное туннелирование вихрей является некогерентным вплоть до нулевой температуры, а вероятность туннелирования w при понижении температуры обращается в ноль по степенному закону: $w \propto T^{2\pi\eta - 1}$ (где показатель степени вычислен для кусочно-параболического потенциала).

Еще одна модель, которую мы рассмотрим, имеет гамильтониан

$$\hat{H} = \sum_{(jj')} \left[\frac{J'}{2}(\hat{n}_j - \hat{n}_{j'})^2 - V\cos(\phi_j - \phi_{j'})\right] \tag{5}$$

и в терминах решетки туннельных контактов соответствует нефизическому случаю, когда учтена лишь взаимная емкость каждой пары соседних гранул. Эта же модель применима для описания свободной поверхности квантового кристалла [10,11]. При такой интерпретации первое слагаемое в (5) есть потенциальная энергия поверхности, связанная с наличием на ней ступеней, а второе — описывает перескоки атомов вдоль поверхности. При $J, k_B T \ll V$ поверхность будет находиться в сверхтекучем состоянии [11].

Для характеристик инстантонов в модели (5) применимы те же формулы, что и для модели (1), но с заменой $J \to J'\kappa(\mathbf{k})$. При этом так же как и в модели (4) взаимодействие инстантонов оказывается логарифмическим, что снова позволяет сделать вывод о степенном характере температурной зависимости вероятности туннелирования: $w \propto T^{(\pi/4)(V/J)^{1/2} - 1}$. В случае наличия нормальных шунтов к показателю степени в этой зависимости следует добавить $2\pi\eta$.

Автор благодарен С.В.Иорданскому за обсуждение работы.

Литература

1. *Березинский В.Л.* ЖЭТФ, 1971, **61**, 1144. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* J. Phys., 1973, **C6**, 1181.
2. *Ambegaokar V., Halperin B.J., Nelson D.R., Siggia E.D.* Phys. Rev.Lett., 1978, **40**, 783; Phys.Rev., 1980, **B21**, 1806; *Ambegaokar V., Teitel S.* Phys.Rev., 1979, **B19**, 1667.
3. *Leemann Ch., Lerch Ph., Racine G. – A., Martinoli P.* Phys.Rev.Lett., 1986, **56**, 1291.
4. *Lobb C.J., Abraham D.W., Tinkham M.* Phys.Rev., 1983, **B27**, 150.
5. *Иорданский С.В., Коршунов С.Е.* ЖЭТФ, 1984, **87**, 927.
6. *Коршунов С.Е.* ЖЭТФ, 1986, **91**, 1466.
7. *Chakravarty S., Ingold G.-L., Kivelson L., Luther A.* Phys.Rev.Lett., 1986, **56**, 2303.
8. *Schmid A.* Phys.Rev.Lett., 1983, **51**, 1506.
9. *Булгадаев С.А.* Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, 264; ЖЭТФ, 1986, **90**, 634; *Fisher M.P.A., Zwerger W.* Phys.Rev., 1985, **B32**, 6190; *Коршунов С.Е.* ЖЭТФ, 1987, **93**, 1152.
10. *Fradkin E.* Phys. Rev., 1983, **B28**, 5338.
11. *Iordansky S.V., Korshunov S.E.* J. Low Temp. Phys., 1985, **58**, 425.

Поступила в редакцию
2 июля 1987 г.
После переработки
18 августа 1987 г.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР