29. *Павлов П. В., Пантелеев В. А., Майоров А. В.* Диффузия сурьмы в кремнии вдоль дислокаций // ФНТ.— 1964.— 6, № 2.— С. 382—384.
30. *Wittig M., Birnbaum H. K.* Self-diffusion along edge dislocations in nickel // Phys. Rev.— 1966.— 147, N 2.— P. 495—504.

Физико-технический ин-т
низких температур АН УССР,
г. Харьков

Получено 25.05.87

УДК 539.2

С. Е. КОРШУНОВ

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА КВАНТОВЫЙ РАСПАД МЕТАСТАБИЛЬНОЙ ФАЗЫ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В задаче о квантово-туннельном образовании зародыша стабильной фазы при фазовом переходе I рода учтено влияние конечной сжимаемости метастабильной фазы, приводящее к появлению у вероятности образования зародыша w температурной зависимости. Для малых температур $\ln [w(T)/w(0)] \sim T^4$, а характер перехода к режиму активационного туннелирования остается таким же, как и в отсутствие сжимаемости (переход I рода).

Введение

Квантовая кинетика фазовых переходов I рода в окрестности фазового равновесия, а именно квантово-туннельное образование зародышей стабильной фазы впервые было исследовано в работе Лифшица и Кагана [1]. В использованном этими авторами макроскопическом приближении образование зародыша описывается эффективным действием

$$S_0[R] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, [2\pi\rho_{\mathrm{eff}} R^3 (\partial R/\partial\tau)^2 + 4\pi\alpha R^2 - (4\pi/3)\,\varepsilon R^3] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau L_0(R), \tag{1}$$

записанном нами в эвклидовой форме. Здесь τ — мнимое время; $R \equiv R(\tau)$ — радиус зародыша; $\rho_{\mathrm{eff}} = (\rho - \rho')^2/\rho$; $\rho\,(\rho')$ — плотность метастабильной (стабильной) фазы; α — поверхностная энергия границы раздела фаз; $\varepsilon = \rho'\Delta\mu$; $\Delta\mu$ — разность химических потенциалов. Первое слагаемое в $L_0(R)$ есть кинетическая энергия метастабильной фазы, вычисленная в предположении, что обе фазы несжимаемы.

В квазиклассическом приближении вероятность образования зародыша w с экспоненциальной точностью определяется значением эвклидова действия S на экстремальной траектории: $w \propto e^{-S/\hbar}$. При конечной температуре T экстремаль должна иметь период $\hbar/k_B T$, а действие — быть подсчитано в расчете на период. Поскольку для нуль-температурной экстремали

$$\arcsin(R/R_0) - [(1 - R/R_0)R/R_0]^{1/2} = (\pi/2)(1 - |\tau|/\tau_0), \quad |\tau| < \tau_0 \tag{2}$$

(где $R_0 = 3\alpha/\varepsilon$) время пролета $2\tau_0 = 3\alpha(6\rho_{\mathrm{eff}}/\varepsilon^3)^{1/2}$ конечно, а действие (1) локально, она сохраняет свой вид и при $T > 0$ [1], так что w не зависит явно от T вплоть до точки перехода к активационному режиму: $T_0 \approx \approx 1{,}57\hbar/k_B\tau_0$, в которой действие на траектории (2) сравнивается с действием на стационарной траектории $R = {}^2/_3 R_0$ [1].

В настоящей работе будет показано, что учет конечной сжимаемости метастабильной фазы приводит к нелокальности эффективного действия, и как следствие, — к появлению температурной зависимости у w и в режиме квантового туннелирования, а также будет найден вид этой зависимсcти для малых температур.

1. Эффективное действие

Если считать метастабильную фазу сжимаемой квантовой жидкостью, то вклад в действие, связанный с ее движением в квадратичном приближении будет иметь вид

$$S_M = \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{R(\tau)}^{\infty} dr 4\pi r^2 \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 \right], \tag{3}$$

где $\varphi \equiv \varphi(r, \tau)$ — потенциал скорости; c — скорость звука. Распределение скоростей при этом считается сферически-симметричным.

Варьирование S_M по φ вместе с последующим фурье-преобразованием приводит к уравнению Пуассона

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r, \omega)\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\varphi(r, \omega),$$

поэтому любая экстремальная конфигурация поля φ представима в виде

$$\varphi(r, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\exp(-|\omega| r/c - i\omega\tau)}{r} \Phi(\omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau'}{2\pi} \frac{2c}{r^2 + c^2(\tau-\tau')^2} \Phi(\tau'). \tag{4}$$

При этом также должно выполняться задающее связь между $R(\tau)$ и $\Phi(\tau)$ граничное условие (закон сохранения массы)

$$\gamma\frac{\partial R}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r, \tau)\Big|_{r=R(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau'}{2\pi} \frac{4cR(\tau)}{[R^2(\tau) + c^2(\tau-\tau')^2]^2}\Phi(\tau'), \tag{5}$$

где $\gamma = (\rho' - \rho)/\rho$. При $c \to \infty$ правая часть (5) переходит в $\Phi(\tau)/R^2(\tau)$, а при конечной сжимаемости ее можно разложить в ряд по обратным степеням c:

$$\gamma\frac{\partial R}{\partial\tau} = \frac{\Phi(\tau)}{R^2(\tau)} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Phi(\tau) - \frac{R(\tau)}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau'}{\pi}\frac{1}{\tau-\tau'}\frac{\partial^3}{\partial\tau'^3}\Phi(\tau') - \cdots \tag{6}$$

Вид ряда (6) легко установить, разложив в (4) $\exp(-|\omega| r/c)$ в степенной ряд и проведя затем дифференцирование по r. Рассматривая (6) как уравнение относительно $\Phi(\tau)$ и находя его решение с помощью метода последовательных приближений, получаем

$$\Phi(\tau) \approx \gamma R^2 \frac{\partial R}{\partial\tau} + \frac{\gamma R^3(\tau)}{9c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau'}{\pi}\frac{1}{\tau-\tau'}\frac{\partial^4}{\partial\tau'^4}R^3(\tau'), \tag{7}$$

где среди локальных и нелокальных членов сохранены лишь члены главных порядков. Температурная зависимость w определится наименее быстро спадающим нелокальным слагаемым в эффектном действии.

Подставляя (4) в (3), можно представить S_M в виде квадратичной формы по $\Phi(\tau)$:

$$S_M[\Phi] = \frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} d\tau' d\tau'' \Phi(\tau') D(\tau', \tau'')\Phi(\tau''),$$

где

$$D(\tau',\ \tau'')=\frac{4\rho_{\text{eff}}c^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau R^2\left\{\frac{R-(\tau-\tau')\,\partial R/\partial\tau}{[R^2+c^2(\tau-\tau')^2]^2\,[R^2+c^2(\tau-\tau'')^2]}+\right.$$

$$\left.+\frac{R-(\tau-\tau'')\,\partial R/\partial\tau}{[R^2+c^2(\tau-\tau')^2]\,[R^2+c^2(\tau-\tau'')^2]^2}\right\} \tag{8}$$

и $R\equiv R(\tau)$. Точное вычисление входящего в (8) интеграла удается выполнить лишь при $R=\text{const}$. В этом случае

$$D(\tau',\ \tau'')=4\rho_{\text{eff}}c\,\frac{12R^2+c^2(\tau'-\tau'')^2}{[4R^2+c^2(\tau'-\tau'')^2]^2}$$

и

$$S_M[\Phi]\approx 2\pi\rho_{\text{eff}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\frac{\Phi^2(\tau)}{R(\tau)}-\frac{\rho_{\text{eff}}}{c}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau'd\tau''\left[\frac{\Phi(\tau')-\Phi(\tau'')}{\tau'-\tau''}\right]^2.$$

Как главный локальный член в $S_M\,[\Phi]$ (первое слагаемое в (9), «выживающее» и при $c\to\infty$), так и главный нелокальный член (второе слагаемое в (9)) сохраняют свой вид и при $R\neq\text{const}$. В последнем нетрудно убедиться, заметив, что при $c\,|\tau'\tau''|\gg R\,(\tau'),\ R\,(\tau'')$ главный вклад в интеграл (8) вносят малые окрестности точек $\tau=\tau'$ и $\tau=\tau''$, а это позволяет точно найти асимптотику $D\,(\tau',\ \tau'')$ при $\tau'-\tau''\to\pm\infty$. Удерживая после подстановки (7) в (9) лишь ведущую нелокальность, для полного действия системы тогда будем иметь

$$S\,[R]\approx S_0\,[R]+S_1\,[R],$$

$$S_1\,[R]=-\frac{\rho_{\text{eff}}}{9c}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau'd\tau''\left[\frac{\partial R^3(\tau')/\partial\tau'-\partial R^3(\tau'')/\partial\tau''}{\tau'-\tau''}\right]^2. \tag{10}$$

Отметим, что варьирование (10) по R и аналитическое продолжение на реальное время $(|\omega|\to-i\omega)$ приводят к уравнению движения

$$2\pi\rho_{\text{eff}}\,[3R^2(\partial R/\partial t)^2+2R^3(\partial^2R/\partial t^2)]+8\pi\alpha R-4\pi\varepsilon R^2=\frac{4\pi\rho_{\text{eff}}}{3c}R^2\frac{\partial}{\partial t^3}R^3,$$

левая часть которого соответствует диссипативной функции

$$f=\frac{\rho_{\text{eff}}}{8\pi c}(\partial^2V/\partial t^2)^2,\quad V\equiv\frac{4\pi}{3}R^3,$$

такой, что $2f$ в точности совпадает с выражением для энергии, уносимой звуковой волной, излучаемой при изменении объема тела [2].

Интересно, что, в отличие от системы с омической диссипацией, у которой диссипативная функция квадратична по первой временной производной [3], в нашем случае нелокальная поправка к эвклидову действию отрицательна. С феноменологической точки зрения это является естественным следствием различия в виде диссипативных функций, а с точки зрения «микроскопических» (жидкостных) переменных отрицательность $S\,[R]-S_0[R]$ объясняется тем, что при образовании зародыша в сжимаемой жидкости лишь часть ее успевает прийти в движение, и суммарная кинетическая энергия оказывается меньше, чем в отсутствие сжимаемости.

2. Температурная зависимость вероятности образования зародыша

Найденная в предыдущем разделе нелокальная поправка к действию приводит как к изменению формы экстремальной траектории, так и к необходимости учета взаимодействия различных ее участков между собой. Если же ограничиться видом температурной зависимости вероятности образования зародыша w при малых температурах ($T\ll T_0$), то существенным оказывается лишь последнее обстоятельство. В этом случае температурно-зависимая поправка к действию $\Delta S\ (T)$ может быть найдена путем вычисления взаимодействия различных участков периодического продолжения траектории (2) между собой, возникающего из-за перекрестных членов в $S_1\ [R]$:

$$\Delta S(T) = -\frac{4\rho_{\rm eff}}{3c}\left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4}\,[\int_{-\tau_0}^{\tau_0} d\tau R^3(\tau)]^2 =$$

$$= -490\left(\frac{3\pi}{4}\right)^6 \frac{\rho_{\rm eff}\alpha^8}{c\varepsilon^9}\left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^4. \qquad (11)$$

Поскольку при $c < \infty$ экстремальная траектория все же несколько отличается от (2), выражение (11) представляет собой лишь главный температурно-зависимый член разложения S по степеням T и обратным степеням c (точнее, по степеням малых параметров $(T/T_0)^2$ и $(\varepsilon/\rho_{\rm eff}c^2)^{1/2}$). Подчеркнем, что $|\Delta S(T)|$ сравнивается с $\hbar$ при температуре $T_1 \ll T_0 (T_1 \sim \varepsilon^{9/4})$, так что существует целая область $T_1 \leqslant T \ll T_0$, в которой увеличение w, происходящее по закону $\ln [w(T)/w(0)] \sim T^4$, оказывается весьма значительным.

Закономерен вопрос, не является ли выделение найденной нами поправки (11) превышением точности, поскольку различные термодинамические величины, которые входят в выражение для действия S_0, вычисленного без учета конечной сжимаемости, также являются температурно-зависимыми. Отметим, что относительная величина поправок к действию, связанных с этими эффектами, зависит лишь от температуры, но не от близости к фазовому переходу. В то же время для поправки (11) $\Delta S\ (T)/S_0 \sim \varepsilon^{11/2}$, так что при $\varepsilon \to 0$ она заведомо окажется преобладающей.

Недавно Бурмистров и Дубовский [4] исследовали влияние омической диссипации на квантовую кинетику фазовых переходов I рода. Для случая, когда диссипация связана со столкновениями окружающей зародыш границы раздела фаз с акустическими фононами (в кнудсеновском режиме), найденная этими авторами поправка к действию

$$\Delta S_D(T) \sim \hbar\,(\rho_{\rm eff}/\rho)\,(\alpha k_BT/\hbar c\varepsilon)^4 \qquad (12)$$

имеет ту же зависимость от температуры, что и (11), но противоположна по знаку. Найденная нами поправка (11) содержит менее высокую степень $1/c$ и более высокую степень $1/\varepsilon$, чем (12), и поэтому в области применимости макроскопического приближения будет доминировать. Для случая гидродинамического режима течения фононного газа выражение (12) должно быть умножено на величину порядка $l/R_0 \ll 1$ (l — длина свободного пробега) [4], так что диссипативная поправка $\Delta S_D(T)$ оказывается тем более несущественной.

Общая схема исследования вопроса о характере перехода от режима квантового туннелирования к режиму тепловой активации при распаде метастабильного состояния в системе с макроскопическим числом степеней свободы была предложена Ларкиным и Овчинниковым [5]. В работе [4] она была использована при анализе влияния омической диссипации на образование критического зародыша. Применение этого же подхода к рассматриваемой в настоящей работе задаче показывает, что выполнение условия $\varepsilon \ll \rho_{\rm eff}c^2$ (при котором только и «работает» использованное нами формальное разложение по $1/c$) гарантирует то, что переход к режиму активационного туннелирования так же, как в случае $c = \infty$ [1], будет происходить как фазовый переход I рода.

При нарушении условия $\varepsilon \ll \rho_{\rm eff}c^2$ (что для фазового перехода в ^{4}He будет иметь место по крайней мере в части интервала доступных экспериментальному наблюдению скоростей зародышеобразования) нуль-температурная экстремальная траектория оказывается сильно отличной от (2), а проведенный нами анализ — неприменимым. Однако и в этом случае, если для $T = 0$ время пролета по экстремали конечно, то при $T \ll T_0$ сохраняется зависимость — $\Delta S(T) \sim T^4$.

Автор благодарен С. В. Иорданскому за обсуждение работы и полезные замечания.

S. E. KORSHUNOV

COMPRESSIBILITY INFLUENCE ON QUANTUM DECAY OF METASTABLE PHASE AT LOW TEMPERATURES

The finite compressibility of the metastable phase is taken into account when analysing the problem of quantum nucleation at the first-order transition. It makes the probability of nucleation w temperature-dependent. For the small temperatures $\ln[w(T)/w(0)] \sim T^4$, and the character of the transition to activation tunneling regime remains the same as for zero compressibility (first-order transition).

LIST OF SYMBOLS. c, sound velocity; f, dissipative function; L_0, Lagrangian for the case of zero compressibility; R, nucleus radius; r, distance from nucleus center; S, euclidian action; T, temperature; V, nucleus volume; w, nucleation probability; α, surface energy; $\varepsilon = \rho'\Delta\mu$; $\Delta\mu$, difference of chemical potentials; ρ, metastable phase density; ρ', stable phase density; τ, imaginary time; φ, velocity potential; ω, frequency.

1. *Лифшиц И. М., Каган Ю.* Квантовая кинетика фазовых переходов при температурах, близких к абсолютному нулю // ЖЭТФ.— 1972.— **62**, вып. 1.— С. 385—402.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика.— М. : Наука, 1986.— 736 с.
3. *Caldeira A. O., Leggett A. J.* Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems // Phys. Rev. Lett.— 1981.— **46**, № 4.— P. 211—214.
4. *Бурмистров С. Н., Дубовский Л. Б.* Влияние диссипации на квантовую кинетику фазовых переходов при низких температурах. // ЖЭТФ.— 1987.— **93**, вып. 2.— С. 733—746.
5. *Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н.* Квантовомеханическое туннелирование с диссипацией. Предэкспоненциальный множитель. // ЖЭТФ.— 1984.— **86**, вып. 2.— С. 719—726.

Ин-т теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР,
Черноголовка, Московской обл.

Получено 25.05.87