

Материалы по курсу “Современная гидродинамика”  
Разработаны Сергеем Сергеевичем Вергелесом

ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка

Текст скомпилирован 23 октября 2025 г., 20:32

Глава 1

# ПРОГРАММА КУРСА “ГИДРОДИНАМИКА”

## Темы занятий по неделям: краткий свод тем

**Лекция 1** Уравнение Эйлера. Потенциальные течения: волны на поверхности жидкости.

**Лекция 2** Процессы диссипации в жидкости. Вязкий пограничный слой.

**Лекция 3** Нелинейные эффекты при распространении поверхностных волн.

**Лекция 4** Потенциальные течения: обтекание тел.

**Лекция 5** Течение при малых числах Рейнольдса. Обтекание сферы. Аксиально-симметричное течение.

**Лекция 6** Звуковые волны. Распространение звука в слабо неоднородной среде.

**Лекция 7** Одномерное нелинейное изэнтропийное течение.

**Лекция 8** Ударная волна. Слабая ударная волна.

**Лекция 9** Течение быстро вращающейся жидкости. Влияние жёстких границ на геострофическое течение.

**Лекция 10** Развитие трёх-мерное турбулентное течение.

**Лекция 11** Динамика точечных вихрей в идеальной двумерной гидродинамике. Развитие двумерное турбулентное течение.

## Неделя 1.

### Лекция 1.

Уравнение Эйлера: закон сохранения импульса. Несжимаемая жидкость.

**Потенциальное течение.** Уравнение Бернулли. Мгновенность отклика жидкости при потенциальном течении. *Литература:* Пункт 2-7.3.

**Волны на свободной поверхности жидкости.** Монохроматическая поверхностная волна. Дисперсионное соотношение; групповая скорость. Энергия поверхностной волны; поток энергии. Импульс и его поток в волне. Дрейф Стокса. *Литература:* §§ 7-1,7-2, полученные уравнения на огибающую — § 13-1.2.

### Семинар 1.

Закон дисперсии капиллярных волн.

• **Задача 1:** Описать линейный отклик несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на источник  $(\rho_0/c^2)f$  (аддитивная добавка к локальному давлению на поверхности, см. (7.9b)) размера  $a$ , равномерно движущийся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $V$ :

$$f = \exp\left(-\frac{x'^2 + y^2}{2a^2}\right), \quad x' = x - Vt.$$

Полагать, что скорость  $V$  значительно больше минимальной фазовой скорости  $v_{ph,min}$  волн на поверхности. Глубина жидкости неограниченно большая.

### Домашнее задание 1.

#### Поверхностные волны

• **Задача 1:** Из-за обрушения пород на отвесном берегу реки на поверхности воды была возбуждена группа гравитационных волн, распространяющихся от берега. Характерная длина волны оказалась равной  $\lambda = 1$  м. Через какое время после возбуждения волны достигнут противоположного берега, если ширина реки равна  $L = 50$  м? Считайте, что влияние дна на распространение волн несущественно.

• **Задача 2:** Пусть в начальный момент времени огибающая плоского волнового пакета с узкой спектральной шириной в сопровождающей системе координат имела гауссову зависимость:  $\Phi(x, t = 0) = \exp(-x^2/2\xi^2)$ , где  $\xi/v_g$  — длительность импульса,  $v_g$  — групповая скорость. Найти дальнейшую эволюцию огибающей, если известна вторая дисперсия  $v'_g \equiv dv_g/dk$ . Построить на компьютере график огибающей (действительной и мнимой частей, желательно компьютерной программой для выявления всех характерных особенностей кривых) при  $t = 30\xi^2/|v'_g|$  в интервале  $x \in [-100\xi, 100\xi]$ .

• **Задача 3:** Описать форму поверхности несжимаемой жидкости в пределе линейного отклика, если на поверхность действует внешняя сила  $(\rho/d)f$ , см. (7.9b,7.11a,7.11b). Область действия силы имеет размер  $a$  и равномерно движется вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $V > 0$ :

$$f = \exp\left(-\frac{x'^2 + y^2}{2a^2}\right), \quad x' = x - Vt.$$

Вода мелкая, её глубина равна  $d \ll a$ . Произвести сначала полуколичественные оценки, а затем вычислить свёртку функции Грина с источником на расстояниях от источника, значительно превышающих его размер. Рассмотреть случаи сверхзвукового  $V > c$  и дозвукового  $V < c$  движений,  $c = \sqrt{gd}$ .

• **Задача 4:** Покажите, пользуясь уравнениями движения, что для произвольной системы гравитационных волн на глубокой воде, распространяющихся в произвольных направлениях, вертикальная компонента скорости дрейфа Стокса всегда равна нулю.

• **Задача 5:** Определите Стоксов дрейф, производимый двумя скрещенными стоячими гравитационными волнами на глубокой воде, описываемыми формой поверхности

$$\eta = H_x \cos(kx) \cos(\omega t) + H_y \cos(ky) \cos(\omega t + \psi),$$

где  $\omega = \sqrt{gk}$ ,  $H_{x,y}$  — амплитуды волн, а  $\psi$  — фиксированная разность фаз волн.

#### Волны на различных границах раздела

• **Задача 6:** Пусть поверхность  $z = 0$  разделяет две жидкости с плотностями  $\rho_I$  (нижняя жидкость) и  $\rho_{II}$  (верхняя жидкость), см. обозначения Пункта 7-1.1.1. Считая, что обе жидкости идеальны, найдите закон дисперсии поверхностных волн (в случае, если плотности сравнимы,  $\rho_{II} \sim \rho_I$ , такие волны называют внутренними). Ускорение свободного падения равно  $g$ , поверхностное натяжение равно  $\sigma$ . Обе жидкости считать идеальными. В записи ответа используйте стандартное обозначение для числа Атвуда (*George Atwood*)

$$At = \frac{\rho_I - \rho_{II}}{\rho_I + \rho_{II}}. \quad (1.1)$$

Отрицательное число Атвуда  $At < 0$  соответствует расположению более тяжёлой жидкости над более лёгкой. Найдите порог  $k_*$  по волновому числу, ниже которого возмущения поверхности являются неустойчивыми. Обе жидкости считать неограниченно глубокими.

• **Задача 7:** Рассмотрите волны на поверхности идеально проводящей жидкости, имеющей поверхностное натяжение  $\sigma$ , массовую плотность  $\rho$ , к которой приложено внешнее однородное стационарное вертикальное направленное поле амплитуды  $E$ . Определите порог

$E_*$  по амплитуде электрического поля, после которого существуют нераспространяющиеся волновые пакеты. Установите порог  $E_{th}$  по амплитуде электрического поля, после которого поверхность становится неустойчивой. Нарисуйте дисперсионную кривую при электрическом поле  $E = 0.99 E_{th}$ . Жидкость имеет неограниченную глубину. *Указание:* К энергии (7.8a), в которой удержаны только квадратичные вклады по амплитуде волны, следует добавить электрическую часть потенциальной энергии (7.5c, 7.5i), после чего получить уравнения движения (7.8b).

- **Задача 8:** Пусть на границе раздела верхняя

## Неделя 2.

### Лекция 2.

**Процессы диссипации в жидкости.** Вязкость. Уравнение Навье-Стокса, первая и вторая вязкость. Теплопроводность. Темп производства энтропии. Диссипация кинетической энергии. *Литература:* § 2-3.

**Вязкий пограничный слой.** *Литература:* § 3-5.

### Семинар 2.

Скорость затухания поверхностной волны на глубокой воде. *Литература:* § 7-6.

### Домашнее задание 2.

• **Задача 1:** Между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $b > a$  заключена жидкость, имеющая кинематическую вязкость  $\nu$ . Внешний цилиндр неподвижен, внутренний совершает малые колебания, двигаясь поступательно вдоль своей оси по гармоническому закону с частотой  $\omega$  (так что скорость на поверхности внутреннего цилиндра равна  $v^z = v_0 \cos(\omega t)$ ). Найти уравнение на распределение течения в цилиндрическом слое жидкости. Решить его для предельных случаев:

- $\delta \ll (b - a)$  и  $a \sim b$ ;
- $\delta \gg (b - a)$ .

## Неделя 3.

Нелинейное взаимодействие гравитационных волн на глубокой воде. Форма плоской монохроматической нелинейной волны на глубокой воде. Коэффициент кубической нелинейности и его знак в нелинейном уравнении Шредингера на огибающую волнового пакета *Литература:* § 7-5.3.

жидкость более плотная, чем нижняя,  $\rho_I < \rho_{II}$  в обозначениях Пункта 7-1.1.1. Жидкости, однако, заключены в замкнутый сосуд, совершающий быстрые вертикальные гармонические колебания с амплитудой  $a$  и циклической частотой  $\Omega$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ , поверхностное натяжение границы раздела равно  $\sigma$ . Определите порог  $k_{th}$  по волновому числу, ниже которого возмущения поверхности являются неустойчивыми. Считайте, что колебания являются высокочастотными, так что  $\Omega \gg \sqrt{-At \cdot gk_*}$ , где характерное волновое число  $k_*^2 = g(\rho_{II} - \rho_I)/\sigma$  велико,  $k_* \gg k_{th}$ , а число  $At$  определено в (7.12a). Обе жидкости считайте идеальными.

Здесь  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  — толщина вязкого пограничного слоя. Течение считать несжимаемым и характеризующимся малым числом Рейнольдса.

• **Задача 2:** Найдите скорость затухания гравитационной волны, когда жидкость нельзя считать глубокой, так что  $kd \lesssim -\ln \gamma$ , где  $d$  — глубина жидкости,  $k$  — волновое число, безразмерное число  $\gamma \ll 1$  (7.23b),  $\omega$  — частота волны,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости.

• **Задача 3:** Прямым вычислением убедитесь, что скорость диссипации энергии в поверхностной волне на глубокой воде (7.23d) можно вычислить как объёмный интеграл от вязкой скорости диссипации кинетической энергии течения, см. (2.14b), причём в качестве поля скорости волны достаточно брать только его потенциальную компоненту.

• **Задача 4:** Имеется бесконечно глубокий водоём (уровень жидкости в состоянии покоя есть  $z = 0$ ), который ограничен в  $x$ -направлении вертикальными отвесными стенками, располагающимися в плоскостях  $x = 0$  и  $x = L$ . В третьем  $y$ -направлении водоём неограничен. Рассмотрим стоячие волны, у которых волновой вектор направлен вдоль  $x$ -оси. i) Считая жидкость идеальной, найдите собственные частоты для таких волны. ii) Считая жидкость слабо вязкой, найдите скорость затухания таких волн.

### Домашнее задание

• **Задача 1:** Покажите, что уравнения движения (7.8b), полученные вариацией гамильтониана  $\mathcal{H}^{(2)} + \mathcal{H}^{(3)}$ , записанного в точности до кубических членов, см. (7.22a, 7.22c), эквивалентны (если течение происходит только в плоскости  $Oxz$ ) уравнениям (7.16, 7.18), полученным путём непосредственного разложения уравне-

ний движения по степеням нелинейности. *Указание:* следует учесть, что  $\psi$  есть потенциал, взятый на поверхности жидкости, тогда как в уравнениях (7.16, 7.18) потенциал взят на плоскости  $z = 0$ .

• **Задача 2:** Рассмотрите нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) (13.8h), в котором коэффициент нелинейности положителен,  $\gamma > 0$ , а коэффициент второй дисперсии  $\beta_2$  может быть как положительным, так и отрицательным.

• Плоские волны  $\exp(ikz - i\omega t)$  по-прежнему являются решением уравнения, как и в линейном пределе. Исследуйте, как зависит дисперсия плоских волн  $k(\omega, P)$  в зависимости от волнового числа и интенсивности  $P = |\Phi|^2$ .

## Неделя 4.

**Потенциальное обтекание тел.** Обтекание тела произвольной формы. Картина течения в системах отсчёта, связанных с неподвижной жидкостью и с телом. Тензор присоединённых масс. *Литература:* § 11-1.

**Обтекание шара** потенциальным течением.

### Домашнее задание

• **Задача 1:** Двигающийся в жидкости шарик со скоростью  $V(t)$  медленно изменяет свой объём, так что его радиус изменяется по закону  $a(t)$ , медленность означает  $\partial_t a \ll V$ . Считая, что на шарик не действуют внешние силы, а обтекание шарика жидкостью чисто потенциально, найдите, как будет изменяться скорость шарика во времени. Массовые плотности материала шарика и жидкости равны при  $a = a_0 \equiv a(t = 0)$ .

• **Задача 2:** Определить итоговое смещение лагранжевой частицы после прохождения твёрдого шара с постоянной скоростью для прицельных расстояний  $r_\perp$ , больших по сравнению с радиусом шара. *Указание:* Воспользуйтесь выражением (11.4b) для потенциала скорости.

## Неделя 5.

### Лекция 5.

**Течение при малых числах Рейнольдса.** Уравнение Стокса. Стационарное уравнение Стокса, функция Грина. Обратимость. Обтекание сферы, формула Стокса. *Литература:* § 3-1.

• Рассмотрите устойчивость плоских волн на плоскости двух параметров — второй дисперсии  $\beta_2$  и интенсивности волны  $P$ . Для этого надо рассмотреть начальные условия  $\Phi_{\omega, P}(1 + \epsilon)$ , где  $\Phi_{\omega, P}(z, t)$  — решение для плоской волны, а  $\epsilon(z, t)$  — произвольная малая добавка; после этого надо установить линеаризованное уравнение на добавку  $\epsilon$  и рассмотреть её эволюцию по координате  $z$ . При каком соотношении коэффициентов хроматической дисперсии  $\beta_2$  и нелинейности  $\gamma$  плоская волна оказывается устойчивой? Если это условие не выполняется, то в каких областях волна оказывается устойчивой (т.е. при любом начальном  $\epsilon_0(t)$  поправка  $\epsilon(z, t)$  не растёт по амплитуде со временем), а в каких нет? Нарисуйте эти области на графике.

### Дополнительные задачи

• **Задача 3:** На дне неограниченного по горизонтали водоёма с плоским дном глубины  $d$  в точке  $\{x, y\} = 0$  находится точечный источник жидкости, имеющий постоянный во времени расход жидкости  $Q$  единиц объёма в единицу времени. Установившееся течение можно считать потенциальным, а саму жидкость — идеальной. Какова максимальная высота поднятия уровня воды над источником? Качественно опишите установившуюся форму поверхности. Найдите аналитически её профиль на расстояниях, больших по сравнению с глубиной. Число Фруда (максимальный угол наклона поверхности) считайте малым; ускорение свободного падения равно  $g$ .

• **Задача 4:** Кумулятивный эффект (эффект Манро, Manroe effect).

Задача 1.14 из [Falkovich, 2018]

• **Задача 5:** Найти присоединённую массу у удлинённого эллипсоида вращения при его потенциальном обтекании, когда эллипсоид движется вдоль своей главной оси. Главная полуось равна  $b$ , две другие равны  $a \ll b$ . Расчёты произвести с логарифмической точностью по параметру  $b/a$ .

### Семинар 5.

**Аксиально-симметричное течение.** Обтекание очень вытянутого эллипсоида вращения, движущегося вдоль своей главной оси. Плавание при низких числах Рейнольдса. *Литература:* § 3-3.

• **Задача 1:** Сильно удлинённый эллипсоид враще-

ния движется вдоль своей оси с маленькой скоростью, так что число Рейнольдса для течения вблизи него мало. Найти с логарифмической точностью подвижность для такого движения. Большая полуось эллипсоида равна  $b$ , остальные две меньшие —  $a$ ,  $a \ll b$ . *Указание:* считайте, что сила  $F$ , приводящая в движение эллипсоид, распределена с некоторой погонной плотностью вдоль него. Действие этой распределённой силы обеспечивает движение точек эллипсоида со скоростью  $V$  вдоль его оси. При этом всю длину эллипсоида следует разбить на области, размер которых равен размеру его поперечного сечения.

## Домашнее задание 5.

• **Задача 1:** Задача о тумане: почему мелкие капельки, составляющие облака, не падают вниз? Найдите скорость падения капли воды радиуса  $a = 1$  мкм в воз-

духе. Динамическая вязкость воздуха  $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$  Па · с. Упрощённо считайте, что течение в капле воды не возбуждается.

• **Задача 2:** Между двумя концентрическими сферами с радиусами  $b > a$  заключена жидкость, имеющая кинематическую вязкость  $\nu$ . Внешняя сфера неподвижна, внутренняя совершает малые вращательные колебания, так что угол её поворота вокруг оси симметрии изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega$  (азимутальная скорость на экваторе внутренней сферы равна  $v^\varphi = v_0 \cos(\omega t)$ ). Найти уравнение на распределение течения в сферическом слое жидкости. Решить его для предельных случаев:

$$- \delta \ll a, (b - a);$$

$$- \delta \gg (b - a).$$

Здесь  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  — толщина вязкого пограничного слоя. Течение считать несжимаемым и характеризующимся малым числом Рейнольдса.

## Неделя 6.

### Лекция 6.

**Звуковые волны.** Изэнтропическое течение и баротропная жидкости. *Литература:* Пункт 2-7.3.

Гамильтониан изэнтропического потенциального сжимаемого течения. Квадратичная часть гамильтониана по малым скоростям и малому сжатию. Переход к каноническим переменным. Средние импульс и энергия, связанные с волной. *Литература:* § 4-1.

**Одномерное нелинейное изэнтропийное течение.** Уравнения, описывающие одномерное течение идеальной жидкости. Инварианты Римана, характеристики. Бегущая волна в изэнтропийной жидкости. Явление опрокидывания, уравнение Хопфа. *Литература:* § 5-1.

**Дополнительная тема: стационарное течение сжимаемой жидкости.** *Литература:* § 5-5.

### Семинар 6

Эволюция бегущей волны, исходно имевшей синусоидальный профиль.

## Домашнее задание 6.

• **Задача 1:** Определить скорость дрейфа лагранжевой траектории в поле плоской монохроматической звуковой волны. Амплитуда колебаний давления в

волне равна  $P'$ , скорость звука равна  $c$ , плотность среды в состоянии покоя —  $\rho$ .

• **Задача 2:** Найдите длину распространения звуковой волны (длина, на которой интенсивность звука падает в  $e$  раз), имеющей частоту 100 Гц, в трубке фонендоскопа. Внутренний диаметр трубки равен  $d = 3$  мм, плотность воздуха равна  $\rho = 1.2$  кг/м<sup>3</sup>, сдвиговая динамическая вязкость воздуха равна  $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$  Па · с, скорость звука  $c = 330$  м/с. *Указание:* для определения затухания необходимо учитывать вклад в диссипацию со стороны вязкого приграничного слоя.

### Стационарное течение сжимаемой жидкости

• **Задача 3:** Рабочим телом реактивного двигателя является двухатомный идеальный газ. Молекулы газа имеют массу  $m = 30$  а.е.м. На входе в сопло температура газа равна  $T_0 = 1000$  °С, давление  $P_0 = 2$  атм. Давление в окружающей среде равно  $P_e = 0.5$  атм. Расход вещества у двигателя  $Q = 0.5$  кг/с. Найдите тягу двигателя, если i) сопло является монотонно суживающимся с минимально возможной площадью сечения на выходе; ii) используется сопло Лавала с максимально возможной площадью сечения на выходе. Чему равны площади поперечного течения сопла на выходе в обоих случаях?

## Неделя 7.

### Лекция 7.

Распространение звука в слабо неоднородной неподвижной среде. Длинно волновое приближение. Приближение эйконала. Траектория лучей. Плотность потока энергии. Каустики. *Литература:* § 4-4.

Распространение звука в неоднородно движущейся среде. Длинно волновое приближение. Нётеровский интеграл движения. Приближение эйконала. Траектория лучей. Сохраняющиеся величины в волновых пакетах при распространении вдоль лучей: частота, волновое действие. *Литература:* § 4-5.

### Домашнее задание 7.

## Неделя 8.

### Лекция 8.

**Ударная волна.** Законы сохранения на ударной волне. Необратимость в ударной волне. Адиабата Гюгонио и адиабата Пуассона. Степень сжатия. Пример идеального газа. *Литература:* § 5-2.

**Слабая ударная волна.** Связь скачка энтропии со скачком давления на ударной волне *Литература:* § 5-3. Слабая ударная волна и решение Римана для простой волны. Уравнение Бюргерса; шок.

### Семинар 8.

Рассмотреть эволюцию звукового импульса, имеющего треугольную форму. *Литература:* [Ландау & Лифшиц, 1986, § 102].

### Домашнее задание 8.

• **Задача 1:** Рассмотрите эволюцию периодической последовательности ударных волн с треугольным профилем, в частности, зависимость амплитуды ударных волн от времени. Такую последовательность можно рассматривать как некоторую промежуточную асимптотику эволюции изначально монохроматической звуковой волны конечной амплитуды, см. Пункт 5-1.2.1. *Указа-*

• **Задача 1:** Плоская монохроматическая звуковая волна распространяется вдоль оси  $Ox$ , в области  $x > 0$  скорость звука  $c_s(x)$  плавно возрастает в сторону увеличения координаты  $x$ . Итоговое её изменение велико,  $c_s(x \rightarrow +\infty) \gg c_{s,0} \equiv c_s(x = 0)$ . Плотность энергии, связанная со звуковой волной на входе (т.е. при  $x = 0$ ) равна  $\rho_{s,0}^{E+K}$ . Определите интегральное по  $x$ -координате давление  $\pi_{xx}$ , которое производит волна на среду.

• **Задача 2:** Определите начальную форму траекторий звуковых лучей, распространяющихся в течении, направленном вдоль оси  $Ox$  и имеющем вертикальный сдвиг силы  $\Sigma$ , испущенных источником под малым углом к горизонтальной поверхности.

*ние:* Пусть период равен  $\lambda$ , а положения некоторых двух соседних ударных волн в начальный момент времени суть  $x = \pm\lambda/2$ . В начальный момент времени между этими точками скорость линейно меняется с координатой,  $v = w_0x$ ,  $|x| \leq \lambda/2$ .

• **Задача 2:** Пусть начальным состоянием волны является (5.13o), причём у волны большая амплитуда в смысле  $u_0/k \gg \mu$ . i) Пользуясь формализмом, основанном на преобразовании Коула-Хопфа (5.13m), найдите амплитуду волны на больших временах  $t \gg 1/\mu k^2$ . Как эта амплитуда зависит от начальной амплитуды волны  $u_0$ ? ii) Рассмотрите времена  $1/ku_0 \ll t \ll 1/\mu k^2$ . Покажите, что непосредственное решение уравнения Бюргерса через преобразование Коула-Хопфа с начальным условием (5.13o) соответствует решению задачи о последовательности треугольных импульсов в пределе бесконечно малой вязкости и теплопроводности и элементарному решению уравнения Бюргерса в виде шока (5.13l). В частности, чему будет равна ширина областей, в которых градиент скорости достигает максимальных значений? *Указание:* Используйте то, что результатом диффузии исходно сконцентрированного вблизи некоторой точки “вещества” на больших временах всегда является гауссова форма его пространственного распределения, а также то, что уравнение диффузии — линейно.

## Неделя 9.

### Лекция 9.

**Течение быстро вращающейся жидкости.** Уравнение Навье-Стокса в вихревой форме, вектор Ламба. Уравнение Навье-Стокса для жидкости, вращающейся как целое. Число Россби. Инерционные волны: закон дисперсии, групповая скорость. Геострофическое течение. *Литература:* § 8-1.

**Влияние жёстких границ на геострофическое течение.** Влияние горизонтальных твёрдых границ на течение жидкости вращающейся как целое. Слой Экмана для геострофического течения; вторичные течения, порождённые геострофическим течением; эффективное уравнение на геострофическое течение. *Литература:* § 8-4.

### Семинар 9.

#### Домашнее задание 9.

• **Задача 1:** При экспериментальном наблюдении динамики кольцевых вихрей, образованных кольцевыми пузырями (смотри § 11-2), может быть удобнее измерять зависимость радиуса вихря  $R$  от его положения по вертикали. Найдите закон  $R(z)$ . Ограничьтесь логарифмической точностью по отношению  $R/a \gg 1$ , где  $a$  — радиус сечения пузыря.

• **Задача 2:** Определите собственные моды инерционных стоячих волн и их частоты колебаний в цилиндре кругового сечения, который вращается вокруг своей оси. Радиус основания цилиндра равен  $R$ , его высота —  $H$ . Жидкость считать идеальной. Используйте цилиндрические координаты, в которых нижний торец цилиндра лежит в плоскости  $z = 0$ , а верхняя — в плоскости  $z = H$ . Для краткости записи частоту  $\omega$  измеряйте в  $2\Omega$ , расстояние — в  $H$ .

## Неделя 10.

### Лекция 10.

**Развитие трёх-мерное турбулентное течение.** Локальность взаимодействия масштабов. Изотропизация течения. Инерционный интервал. Скейлинг для изотропной турбулентности. *Литература:* § 9-4.

### Семинар 10.

Закон Ричардсона для разбегания траекторий. Раз-

• **Задача 3:** Плоская граница области течения жидкости, вращающейся как целое с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $Oz$ , описывается уравнением  $x \sin \theta_b + z \cos \theta_b = 0$ , так что нормаль к поверхности  $\ell = \{\sin \theta_b, 0, \cos \theta_b\}$ ,  $-\pi < \theta_b < \pi$  (вектор направлен от стенки в жидкость). Инерционная волна падает на эту поверхность, имея волновой вектор  $\mathbf{k} = k\{\sin \theta_i, 0, \cos \theta_i\}$ ,  $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$  (в силу симметрии (8.4f) этим исчерпываются все возможные варианты), поляризацию  $s$  и комплексную амплитуду  $a = 1$  в разложении (8.4a, 8.4e). Групповая скорость (8.5d) падающей волны направлена к границе,  $(\mathbf{v}_g \cdot \ell) < 0$ , иначе её не следовало бы называть падающей. Найдите: i) условие того, что волна  $\mathbf{k}s$  действительно является падающей, выраженное через параметры  $\theta_i$ ,  $s$ ,  $\theta_b$ ; ii) волновой вектор  $\mathbf{q} = q\{\sin \theta_r, 0, \cos \theta_r\}$ , поляризацию  $\sigma$  и квадрат модуля комплексной амплитуды  $|b|^2$  (интенсивность) отражённой волны. Жидкость считайте идеальной. *Указание:* На плоскости  $\theta_b - \theta_i$  нарисуйте области, в которых падающей волне соответствуют  $s = \pm 1$ . Далее на этой же плоскости выделите области, в которых поляризация отражённой волны совпадает с поляризацией падающей,  $\sigma = s$ , и противоположна ей,  $\sigma = -s$ . Обратите внимание, что у отражённой волны угол  $\theta_r$  может принимать в том числе значения  $|\theta_r| > \pi/2$ .

• **Задача 4:** Найти вертикальную зависимость нормальной к горизонтальной поверхности (поверхности, нормальной к оси вращения) компоненты  $U^z$  вторичного течения внутри слоя Экмана.

• **Задача 5:** Пусть жидкость находится в поле тяжести, а вместо верхней жёсткой границы течения имеется свободная граница. Ускорение свободного падения на столько велико, что границу можно считать плоской, когда весь сосуд вращается. Опишите вторичные течения в вихре-циклоне в этом случае, модифицируйте соответствующим образом Рисунок 8.2.

витие неустойчивости Релея-Тейлора.

#### Домашнее задание 10.

• **Задача 1:** Оцените установившуюся скорость падения шара радиуса 1 м, сделанного из базальтовой ваты. Массовая плотность базальтовой ваты равна  $100 \text{ кг/м}^3$ , плотность воздуха равна  $1.2 \text{ кг/м}^3$ , динамическая вязкость воздуха равна  $2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

## Неделя 11.

### Лекция 11.

**Развитое двумерное турбулентное течение.** Энтрофия как сохраняющаяся величина в двумерной идеальной жидкости. Обратный каскад энергии и прямой каскад энтрофии. *Литература:* § 9-6.

### Семинар 11.

Динамика точечных вихрей в идеальной двумерной гидродинамике. Один точечный вихрь; пара равных по амплитуде и знаку вихрей; пара равных по амплитуде и разных по знаку вихрей. Обсуждение динамики вихревых колец.

### Домашнее задание 11.

• **Задача 1:** В двумерном статистически изотропном и инвариантном по отношению к операции инверсии хаотическом потоке структурные функции  $S^{rrr}$  (9.11e) и  $S_{\omega}^r$  (9.12e) однозначно связаны между собой через условие несжимаемости течения. Установите эту связь и найдите зависимость  $S^{rrr}(r)$ , соответствующую установленной зависимости (9.23c) для  $S_{\omega}^r$  в инерционном интервале прямого каскада энтрофии.

• **Задача 2:** Будем считать силу  $\mathbf{f}$  в (9.13) случайной по времени, с коротким временем корреляции, статистически изотропной и обладающей некоторой длиной корреляции  $L_f$  в пространстве. В таком случае

статистика случайной силы полностью задаётся парной корреляционной функцией:

$$\langle f_i(\mathbf{r}, t) f_k(\mathbf{r}', t') \rangle = \rho^2 \epsilon \frac{2\delta_{ik}}{d-1} \chi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \delta(t-t'), \quad (1.2)$$

где безразмерная функция  $\chi(r)$  равна 1 в нуле и убывает на расстоянии  $L_f$ , а  $d$  — размерность пространства. Покажите, что мощность, затрачиваемая силой на единицу массы, равна действительно (9.15f), и что приближение (9.18n) действительно оправдано.

• **Задача 3:** Решите уравнение на эволюцию пассивно переносимого скаляра  $\vartheta$  сдвиговым течением, подверженного диффузии (уравнение (10.4a)) с начальным условием

$$\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0 \exp(-\rho^2/2L_f^2) \quad (1.3)$$

и отсутствующей внешней силой  $f$ . Сила сдвига велика в смысле (10.7). Решите задачу одним из способов:

i) Решите уравнение (10.4a) методом характеристик в Фурье-пространстве, а потом перейдите в координатное пространство для окончательного ответа.

ii) Воспользуйтесь тем, что начальное условие (10.5b) есть гауссово распределение в пространстве, а уравнение (10.4a) сохраняет общий вид гауссового распределения. В качестве параметров гауссового распределения естественно выбрать собственные значения  $L_-, L_+$  и угол поворота  $\psi$  главных осей относительно декартовой системы координат  $O\xi\eta$ . Напишите динамические уравнения на эти три переменные.

# ТЕЧЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

## §2-1. Поток массы и импульса в непрерывной среде

Полезной литературой является [Dzyaloshinskii & Volovick, 1980].

Пусть нам дана некоторая непрерывная среда, например, кристалл, жидкость или стекло. Мы предполагаем, что в микроскопическом смысле среда находится в локальном термодинамическом равновесии. Глобально термодинамического равновесия нет, однако это глобальное отличие на локальном уровне можно считать малым возмущением.

Пусть массовая плотность элемента среды, находящегося в точке с декартовыми координатами  $r^i$  равна  $\rho$ . Скорость этого элемента обозначим  $v^i$ : при этом мы считаем, что среда однокомпонентна, то есть движение совокупности всех частиц, составляющий этот небольшой элемент, можно представить как движение единого целого.

### 2-1.1 Эйлерово и лагранжево описание непрерывной среды

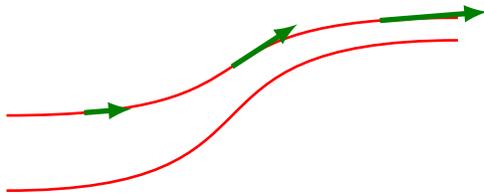


Рис. 2.1 Линии тока (красные) и поле скорости (зелёные стрелки).

Пусть дано тело, которое можно представить как некоторую непрерывную среду. Рассмотрим некоторую деформацию этого тела. При деформации элемент среды, находившийся в точке с декартовыми координатами  $a^\mu$ ,  $\mu = \overline{1,3}$ , переходит в точку с декартовыми координатами  $r^i$ , где  $i = \overline{1,3}$ . Таким образом, после деформации в пространстве оказываются заданными две различные системы координат: декартовы координаты  $r^i$  и теперь уже криволинейные координаты  $a^\mu$ . Связь между этими координатными системами

$$\begin{aligned} \text{отсутствие деформации: } & r^i = a^\mu \Big|_{\mu=i}, \\ \text{деформация : } & r^i = r^i(t, a^\mu) \end{aligned} \quad (2.1)$$

полностью задаёт деформацию при фиксированном параметре  $t$ . Естественно считать, что параметр  $t$  есть время, с течением которого деформация изменяется. Тогда скорость движения среды в точке  $\mathbf{r}$  равна

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(t, a^\mu)}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Линиями тока (*streamlines*) в фиксированный момент времени  $t$  называют семейство кривых, к которым поле скорости является всюду касательным. Пример линий тока изображён на Рисунке 2.1. В силу определения линий тока они не пересекаются. В общем случае нестационарного течения линии тока изменяются со временем.

#### 2-1.1.1 Эйлеровы координаты

Координаты  $r^i$  называются эйлеровыми координатами. Эти координаты отличаются тем, что при деформации тела координатная система не меняется, а меняются координаты элементов тела.

#### 2-1.1.2 Лагранжевы (материальные) координаты

Координаты  $a^\mu$  называют лагранжевыми (материальными) координатами, поскольку они связаны с материальными элементами тела (точками), в противоположность эйлеровым координатам

Через материальные координаты удобно задавать направления кристаллических осей в теле, если оно обладает анизотропной кристаллической структурой. Мы обозначаем индекс у материальных координат первыми буквами греческого алфавита с тем, чтобы отличать две введённые координатные системы, декартову и материальную.

#### 2-1.1.3 Субстанциональная (Лагранжева) производная

Например, субстанциональная (её также называют Лагранжевой) производная плотности равна

$$d_t \rho \equiv \frac{d\rho}{dt} = \partial_t \rho + (\mathbf{v} \nabla) \rho. \quad (2.3)$$

По смыслу, Лагранжева производная есть производная по времени в системе отсчёта, связанной с выделенным элементом жидкости.

## 2-1.2 Поток массы

Полная масса сохраняется, поэтому локальное изменение плотности должно быть связано только с её потоком, равным  $\rho \mathbf{v}$ . таким образом, скорость изменения плотности массы определяется скоростью переноса вещества

$$\partial_t \rho = -\partial_i(\rho v_i) \equiv \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.4a)$$

Уравнение (2.4a) называется *уравнением непрерывности*. Сохранение полной массы следует из интегральной формы уравнения (2.4a):

$$\partial_t \int d^3r \rho = - \int d^3r \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

При интегрировании по частям мы сделали естественное предположение, что существуют границы рассматриваемого течения, за которыми граничный вклад при интегрировании по частям исчезает.

Изменение плотности элемента жидкости, то есть субстанциональная производная плотности, равна

$$d_t \rho = (\partial_t + (\mathbf{v} \nabla)) \rho = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.4b)$$

Пусть  $\mathcal{V}$  – объём элемента жидкости, масса которого равна единице,

$$\rho \mathcal{V} = 1. \quad (2.4c)$$

Величину  $\mathcal{V}$  можно назвать удельным объёмом. Из (2.4b) следует, что лагранжева производная удельного объёма равна

$$d_t \mathcal{V} = \mathcal{V} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.4d)$$

### 2-1.2.1 Несжимаемое течение (деформация)

Если течение жидкости (или деформацию кристалла) можно считать несжимаемым, так что по всему объёму жидкости всегда остаётся  $\rho = \text{const}$ , то из уравнения непрерывности (2.4a) следует, что поле скорости удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.4e)$$

## 2-1.3 Поток импульса

Объёмная плотность импульса равна  $p_i = \rho v_i$ . Поскольку полный импульс есть сохраняющаяся величина, то изменение импульса  $p_i$  единицы объёма во времени определяется дивергенцией потока импульса  $\Pi_{ik}$ :

$$\partial_t p_i \equiv \partial_t(\rho v_i) = -\partial_k \Pi_{ik} + f_i. \quad (2.5a)$$

В правую часть (2.5a) мы также добавили внешнюю объёмную силу  $\mathbf{f}$ , существование которой, конечно, приводит к несохранению импульса.

В потоке импульса  $\Pi_{ik}$  можно выделить две части:

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}. \quad (2.5b)$$

Элементы среды испытывают движение, поэтому первая часть  $\rho v_i v_k = p_i v_k$  есть перенос  $i$ -й компоненты импульса из одной точки пространства в другую со скоростью  $v_k$  в  $k$ -м направлении.

Второй вклад  $-\sigma_{ik}$  в (2.5b), где  $\sigma_{ik}$  называется *тензором напряжений*, возникает из-за того, что между соседними элементами среды есть взаимодействие. Конкретный вид тензора напряжений зависит от свойств непрерывной среды и её динамического состояния.

Для того, чтобы пояснить смысл тензора напряжений  $\sigma_{ik}$ , выделим малый элемент среды в форме куба со стороной  $dl$  в точке с координатами  $r^i$ . Возьмём грань параллелепипеда, нормаль к которой имеет только  $i$ -ю компоненту, и которая из двух обозначенных вариантов имеет большую  $i$ -ю координату. На эту грань выделенного элемента действует сила,  $k$ -я компонента поверхностной плотности которой равна  $\sigma_{ik}$ .

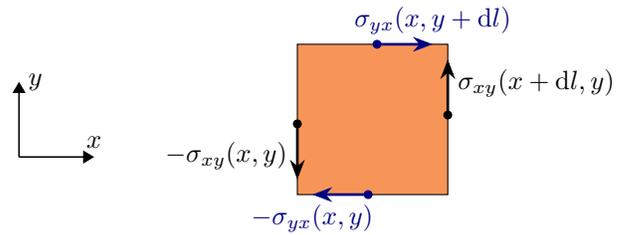


Рис. 2.2 Силы, приложенные к малому элементу объёма кубической формы.

### 2-1.3.1 Симметричность тензора напряжений

Покажем, что тензор напряжений  $\sigma_{ik}$  является симметричным, т.е.

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad (2.5c)$$

если его понимать именно как поверхностную плотность силы, действующей на  $i$ -ю грань куба в  $k$ -м направлении.

Рассмотрим угловую динамику шара малого радиуса  $r$ . Поместим начало координат в центр шара, а через  $do$  обозначим элемент телесного угла. Момент сил

$$K_{ik} = \int r(r_i r_l \sigma_{kl} - r_k r_l \sigma_{il}) do. \quad (2.5d)$$

Разложим тензор напряжений по малому отклонению от центра шара:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}) \approx \sigma_{ik}^0 + r_j \sigma_{ik,j}^0 + \frac{1}{2} r_j r_m \sigma_{ik,jm}^0. \quad (2.5e)$$

Тогда момент сил (2.5d)

$$K_{ik} = \frac{4\pi r^3}{3} (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) + \frac{2\pi r^5}{15} (\sigma_{ki,jj}^0 - \sigma_{ik,jj}^0) + \frac{4\pi r^5}{15} (\sigma_{kj,ij}^0 - \sigma_{ij,kj}^0). \quad (2.5f)$$

Момент инерции шара пропорционален  $r^5$ . Для того, чтобы при  $r \rightarrow 0$  получался регулярный предел для углового ускорения шара, мы должны потребовать, чтобы момент сил (2.5d) был пропорционален той же степени  $r$ . Необходимым и достаточным условием этого являет-

ся условие симметричности (2.5c) тензора напряжений, тогда оказывается равной нулю первая строчка в (2.5f); вторая строчка в (2.5f) уже преобразована с использованием симметрии тензора напряжений.

## §2-2. Течение идеальной жидкости

Однокомпонентная жидкость характеризуется пятью полями: объёмной массовой плотностью  $\rho$ , локальной температурой  $T$ , и тремя компонентами скорости  $\mathbf{v}$ . При этом предполагается, что в любой точке пространства жидкость находится в локальном термодинамическом равновесии. Поэтому локальное состояние жидкости характеризуется двумя термодинамическими величинами, скажем, температурой  $T$  и давлением  $P$ .

Таким образом, для описания движения однокомпонентной жидкости с заданным начальным состоянием надо знать 5 уравнений — три компоненты скорости и две термодинамические характеристики.

### 2-2.1 Уравнения течения

Идеальной жидкостью называется жидкость, в которой нет диссипации: в такой жидкости соседние элементы жидкости взаимодействуют между собой только через давление, и нет передачи тепла от одного более нагретого элемента жидкости к соседнему менее нагретому. Наконец, процесс сжатия и расширения каждого элемента жидкости (если он происходит) следует считать адиабатическим, т.е. не приводящим к повышению энтропии на единицу массы жидкости.

Для любой жидкости одним из уравнений движения является уравнение непрерывности (2.4a), выражающее собою закон сохранения массы.

#### 2-2.1.1 Уравнение Эйлера

Используем теперь закон сохранения импульса (2.5a).

Тензор напряжений  $\sigma_{ik}$  в идеальной жидкости зависит только от локального значения давления  $P$  в жидкости. Из интерпретации тензора напряжений, приведённого в Пункте 2-1.3, следует, что давление может вносить вклад только в диагональные матричные элементы потока импульса, поскольку сила давления приложена всегда нормально к поверхности. Математически, поскольку давление является скалярной величиной, то для того, чтобы из него составить тензор напряжений являющийся тензором второго ранга, мы можем использовать только единичный тензор  $\delta_{ik}$ . Таким образом, поток импульса (2.5b) имеет вид

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P \delta_{ik}, \quad \sigma_{ik} = -P \delta_{ik}. \quad (2.6a)$$

Выпишем уравнение течения (2.5a) в явном виде

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_k(\rho v_i v_k) = -\partial_i P + f_i. \quad (2.6b)$$

где в правую часть мы добавили внешнюю силу, которой может быть, например, сила тяжести. Теперь, используя уравнение непрерывности (2.4a), приходим к *уравнению Эйлера (Euler equation)*

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}. \quad (2.6c)$$

Уравнение Эйлера можно понимать как второй закон Ньютона, записанный для малого элемента жидкости.

#### 2-2.1.2 Завихренность

Завихренностью называется ротор скорости,

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}.$$

Уравнение на завихренность (*vorticity equation*) для несжимаемой жидкости может быть получено из уравнения Эйлера (2.6c) путём взятия ротора от его обеих частей:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \text{ div } \mathbf{v} + \frac{[\nabla \rho \times \nabla P]}{\rho^2}. \quad (2.6d)$$

При этом для преобразования слагаемого  $\text{rot}((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v})$  мы использовали равенство для *вектора Ламба (Lamb vector) [v × ω]*:

$$[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}]] = \nabla v^2 / 2 - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

$$\text{rot}((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \text{ div } \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.6e)$$

Само уравнение Эйлера с привлечением завихренности можно переписать в виде, содержащем вектор Ламба [Lamb, 1877]:

$$\partial_t \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \frac{v^2}{2}. \quad (2.6f)$$

О представлении члена  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ , ответственного за инерцию в уравнении Навье-Стокса, в виде суммы полного градиента и вектора Ламба согласно (2.6e) говорят как о *rotational form*.

## 2-2.2 Уравнение переноса энергии

Последним, пятым уравнением, должно быть уравнение на тепловой перенос. Прежде чем сформулировать это уравнения, введём обозначения термодинамических величин. Удельными плотностями мы будем называть плотности величин на единицу массы. В частности, введём удельную энтропию  $\mathcal{S}$  (в СГС размерность  $1/\Gamma$ ), внутреннюю энергию  $\mathcal{E}$  (в СГС размерность  $\text{см}^2/\text{с}^2$ ), *удельную энтальпию* или *тепловую функцию*  $\mathcal{W}$  и химический потенциал на единицу массы (удельный химический потенциал)  $\zeta$ . Удельным объёмом по определению будем называть обратную плотность,  $\mathcal{V} = 1/\rho$ . Мы также будем использовать объёмные плотности величин: плотность энтропии  $\rho^{\mathcal{S}}$ , внутренней энергии  $\rho^{\mathcal{E}}$ , энтальпии  $\rho^{\mathcal{W}}$  и плотность энергии Гиббса  $\rho^{\Phi}$ . В частности, имеем следующие термодинамические соотношения

$$\rho^{\Phi} = \rho^{\mathcal{E}} - T\rho^{\mathcal{S}} + P, \quad \zeta = \frac{\rho^{\Phi}}{\rho}, \quad (2.7a)$$

$$d\zeta = -\mathcal{S} dT + \frac{dP}{\rho} = -\mathcal{S} dT + \mathcal{V} dP,$$

$$\rho^{\mathcal{W}} = \rho^{\mathcal{E}} + P, \quad \mathcal{W} = \frac{\rho^{\mathcal{W}}}{\rho}, \quad d\mathcal{W} = Td\mathcal{S} + \frac{dP}{\rho},$$

см. также ниже ещё набор соотношений (2.7g). Отметим, что для удельных величин термодинамические соотношения остаются формально теми же самыми, что и соотношения для однородного тела, знакомые по общему курсу термодинамики.

### 2-2.2.1 Уравнение теплового переноса

Идеальная жидкость отличается отсутствием обмена теплом между элементами жидкости. Процесс выравнивания температур двух подсистем сопровождается увеличением энтропии, поэтому отсутствие этого процесса означает, что энтропия каждого элемента жидкости не изменяется. В терминах объёмной плотности энтропии  $\rho^{\mathcal{S}}$  это приводит к уравнению

$$\partial_t \rho^{\mathcal{S}} + \text{div}(\mathbf{v}\rho^{\mathcal{S}}) = 0. \quad (2.7b)$$

С учётом уравнения непрерывности (2.4a) это уравнение эквивалентно условию сохранения удельной энтропии  $\mathcal{S}$  для каждого элемента жидкости

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = 0, \quad \partial_t \mathcal{S} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = \frac{\rho^{\mathcal{S}}}{\rho}, \quad (2.7c)$$

где  $d/dt = \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$  – лагранжева, или субстанциональная производная, см. Пункт 2-1.1.3.

### 2-2.2.2 Перенос энергии

В этом Пункте мы будем полагать, что внешняя сила в уравнении Эйлера (2.6c) является потенциальной и ста-

тической во времени,

$$\mathbf{f} = -\rho \text{grad } \varphi, \quad (2.7d)$$

где  $\varphi(\mathbf{r})$  – потенциал силы.

Выведем уравнение переноса энергии в идеальной жидкости, в которой отсутствуют вязкие силы и теплопроводность. Объёмная плотность полной энергии  $\rho^{E+\mathcal{K}+U}$  есть сумма объёмной плотности внутренней энергии  $\rho^{\mathcal{E}}$ , объёмной плотности кинетической энергии  $\rho^{\mathcal{K}}$ , и объёмной плотности потенциальной энергии  $\rho^U$ :

$$\rho^{E+\mathcal{K}+U} = \rho^{\mathcal{E}} + \rho^{\mathcal{K}} + \rho^U, \quad \rho^{\mathcal{K}} = \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2}, \quad \rho^U = \rho \varphi. \quad (2.7e)$$

По отдельности найдём изменение плотностей каждого вида энергии и после сложим результаты. Из уравнений непрерывности и Эйлера (2.6c) следует, что изменения плотности кинетической и потенциальной энергий равно

$$\partial_t \rho^{\mathcal{K}} + \text{div}(\mathbf{v}\rho^{\mathcal{K}}) = -(\mathbf{v} \cdot (\nabla P + \rho \nabla \varphi)), \quad (2.7f)$$

$$\partial_t \rho^U = \varphi \partial_t \rho = -\varphi \text{div}(\rho \mathbf{v}).$$

Далее, термодинамическое равенство  $dE = Td\mathcal{S} - PdV$  можно переписать в видах

$$d\rho^{\mathcal{E}} = Td\rho^{\mathcal{S}} + \zeta d\rho \stackrel{\text{ideal}}{=} \mathcal{W} d\rho, \quad \mathcal{E} = \frac{\rho^{\mathcal{E}}}{\rho},$$

$$d\mathcal{E} = Td\mathcal{S} + \frac{P}{\rho^2} d\rho \stackrel{\text{ideal}}{=} \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (2.7g)$$

Первые равенства для приращений объёмной и массовой плотностей энергии  $\mathcal{E}$  в (2.7g) верны для любой жидкости, а вторые – только для идеальной. Вместе с уравнением непрерывности (2.4a) и уравнением (2.7b) для объёмной плотности энтропии находим скорость изменения объёмной плотности внутренней энергии  $\rho^{\mathcal{E}}$ :

$$\partial_t \rho^{\mathcal{E}} + \text{div}(\mathbf{v}\rho^{\mathcal{E}}) = -P \text{div } \mathbf{v}. \quad (2.7h)$$

Теперь сложим уравнение (2.7h) с уравнением для скорости изменения объёмной плотности кинетической и потенциальной энергий (2.7f) и получим уравнение переноса для объёмной плотности полной энергии

$$\partial_t \rho^{E+\mathcal{K}+U} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \rho^{E+U} \right) = -\text{div } \mathbf{j}^{E+\mathcal{K}}, \quad (2.7i)$$

где поток полной энергии

$$\mathbf{j}^{E+\mathcal{K}} = \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \mathcal{W} + \varphi \right) = \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \mathcal{E} + \frac{P}{\rho} + \varphi \right). \quad (2.7j)$$

## §2-3. Течение вязкой жидкости

Течение идеальной жидкости не учитывает процессов диссипации. В этом параграфе мы, по прежнему полагаая отклонение от локального равновесия малым, учтём в главном порядке процессы диссипации. По определению, диссипативными процессами мы называем процессы, сопровождающиеся увеличением энтропии системы.

Процессы диссипации имеют два источника. Во-первых, это перенос тепла в сторону, противоположную градиенты температуры. Учёт процессов термодиффузии производится в Пункте 2-3.2. Во-вторых, это трение близких элементов жидкости друг о друга вследствие существования градиента скорости в течении. Учёт этого эффекта приводит к переходу от уравнения Эйлера к уравнению Навье-Стокса и производится в Пункте 2-3.1.

### 2-3.1 Уравнение Навье-Стокса

Учтём в уравнении течения жидкости вклады, возникающие при диссипативном обмене импульсом между соседними элементами жидкости, движущимися с разными скоростями. Для этого в тензор напряжений  $\sigma_{ik}$ , определённый в (2.5b), помимо вклада от давления (2.6a), надо включить вклад, возникающий в случае, если скорость среды изменяется в пространстве. Этот последний вклад называется *вязким тензором напряжений*  $\sigma'_{ik}$ .

Математическим объектом, улавливающим эффект неоднородности скорости в пространстве, является градиент скорости  $\partial_i v_k$ . Он является тензором второго ранга и удовлетворяет условию Галилеевской инвариантности. Из градиента скорости можно составить два тензора второго ранга, симметричных по своим индексам. Таким образом, в общем случае вязкая часть тензора напряжений в приближении уравнения Навье-Стокса равна

$$\sigma'_{ik} = \eta \{\nabla, \mathbf{v}\}_{ik} + \zeta \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.8a)$$

Величина  $\eta$  называется *коэффициентом (первой, сдвиговой) динамической вязкости (shear or first viscosity coefficient)*,  $\zeta$  — *коэффициентом второй (объёмной) динамической вязкости (volume or bulk viscosity coefficient)*. Мы ввели обозначение  $\{\nabla, \mathbf{v}\}$  для симметризованного тензорного произведения с нулевым следом двух произвольных векторных величин, определяемому согласно равенству

$$\{\nabla, \mathbf{v}\}_{ik} = \nabla_i v_k + \nabla_k v_i - \frac{2}{d} \delta_{ik} \nabla_l v_l. \quad (2.8b)$$

где  $d$  — размерность пространства. Геометрический смысл этого разложения аналогичен смыслу разложения малого тензора деформации на дивергентную и бездивергентную части.

Таким образом, первая динамическая вязкость показывает, чему равна диссипативная часть потока импульса в случае сдвигового течения жидкости, не изменяющего её объём. Вторая динамическая вязкость показывает, какой вклад в давление возникает от диссипативных процессов в случае течения, представляющего из себя однородное сжатие. Отметим также, что скорость диссипации кинетической энергии в тепло  $q'^K$  при таком выборе распадается на сумму двух соответствующих слагаемых, см. (2.9b).

Полный поток импульса теперь равен

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik} P - \sigma'_{ik}, \quad \sigma_{ik} = \sigma'_{ik} - \delta_{ik} P. \quad (2.8c)$$

и вместо уравнения Эйлера общее уравнение (2.5a) на сохранение импульса приводит нас к *уравнению Навье-Стокса*

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k(\rho v_i v_k + \delta_{ik} P - \sigma'_{ik}) + f_i. \quad (2.8d)$$

Используя уравнение непрерывности, *уравнение Навье-Стокса (Navier-Stokes equation)* можно записать в его каноническом виде

$$\partial_t v_i + (\mathbf{v} \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i P + \frac{1}{\rho} \partial_k \sigma'_{ik} + \frac{f_i}{\rho}. \quad (2.8e)$$

Если принять, что коэффициенты вязкости однородны в пространстве, то уравнение (2.8e) может быть записано в векторном виде

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \quad (2.8f)$$

$$= -\frac{\operatorname{grad} P}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho},$$

сравни с уравнением Эйлера (2.6c).

#### 2-3.1.1 Изменение во времени локальной плотности кинетической энергии

Из уравнений (2.8) можно получить скорость локального изменения плотности кинетической энергии

$$\rho^K = \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} \quad (2.9a)$$

вязкой жидкости. Считая силу потенциальной,  $\mathbf{f} = -\rho \nabla \varphi$ , получаем

$$\partial_t \rho^K + \operatorname{div}(\mathbf{v} \rho^K) = \quad (2.9b)$$

$$\begin{aligned} &= -(\mathbf{v} \nabla) P - \rho(\mathbf{v} \nabla) \varphi + v_i \partial_k \sigma'_{ik} = \\ &= -\partial_i (v_i P - v_k \sigma'_{ik}) - \rho(\mathbf{v} \nabla) \varphi + P \operatorname{div} \mathbf{v} + q'^K, \end{aligned}$$

где скорость диссипации кинетической энергии в тепло есть

$$-q'^K = \sigma'_{ik} \partial_i v_k = \frac{\eta}{2} \{\nabla, \mathbf{v}\}_{ik} \{\nabla, \mathbf{v}\}_{ik} + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2, \quad (2.9c)$$

а  $-P \operatorname{div} \mathbf{v}$  — скорость адиабатического перехода кинетической энергии во внутреннюю, см. (2.7h).

Диссипативные потери кинетической энергии (2.9c) должны быть всегда положительны. В этом выражении коэффициенты  $\eta$  и  $\zeta$  стоят при существенно положительных величинах, т.е. сами эти коэффициенты неотрицательны. Этим оправдывается выбор вида тензора вязких напряжений (2.8a). Для газов при нормальных условиях отношение  $\zeta/\eta$  может быть от величины порядка единицы (азот) до тысяч (углекислый газ) [Dukhin & Goetz, 2009; Sharma & Kumar, 2023].

### 2-3.2 Уравнение переноса энергии

Напишем изменение полной энергии единицы объёма  $\rho^{E+K}$  жидкости с учётом диссипативных потоков, и вместе с тем определим скорости изменения объёмной плотности внутренней энергии  $\rho^E$  и скорости производства объёмной плотности энтропии  $q^S$ .

Поскольку полная энергия сохраняется, изменение объёмной плотности полной энергии должно быть равно дивергенции её потока. Иными словами, при сложении уравнений на  $\partial_t \rho^K$  и  $\partial_t \rho^E$  все лишние, т.е. не представляющие из себя полной дивергенции слагаемые должны сократиться. Исходя из этого требования, расширим уравнение (2.7h) на распределение внутренней энергии  $\rho^E$ , написанное для идеальной жидкости, на случай неидеальной жидкости. Во-первых, мы должны учесть скорость перехода  $q'^K$  (2.9b) кинетической энергии во внутреннюю вследствие действия вязких сил. Во-вторых, мы должны учесть поток тепла

$$\mathbf{j}'^E = -\varkappa \nabla T, \quad (2.10a)$$

появляющийся вследствие теплообмена между соседними элементами жидкости в случае неоднородного распределения температуры в пространстве. Коэффициент теплопроводности  $\varkappa$  в общем случае зависит от плотности и температуры жидкости; его размерность в СГС равна  $\text{см}^2/\text{с}$ . В итоге получаем:

$$\partial_t \rho^E = -\operatorname{div}(\mathbf{v} \rho^E - \varkappa \nabla T) - P \operatorname{div} \mathbf{v} - q'^K. \quad (2.10b)$$

#### 2-3.2.1 Генерация и перенос тепла

Теперь перейдём к вычислению скорости производства энтропии. Из первого равенства (2.7g) на изменение объёмной плотности энергии можно получить уравнение на изменение объёмной плотности энтропии

$$T(\partial_t \rho^S + \operatorname{div}(\mathbf{v} \rho^S)) = (\partial_t \rho^E + \operatorname{div}(\mathbf{v} \rho^E)) + P \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Это равенство с учётом (2.10b) можно переписать в виде

$$\partial_t \rho^S = -\operatorname{div} \mathbf{j}^S + q^S. \quad (2.10c)$$

где была выделена полная дивергенция. Поток энтропии  $\mathbf{j}^S$  складывается из бездиссипативной и диссипативной частей,

$$\mathbf{j}^S = \mathbf{v} \rho^S + \mathbf{j}'^S, \quad \mathbf{j}'^S = -\frac{\varkappa \nabla T}{T}. \quad (2.10d)$$

Объёмная плотность скорости производства энтропии  $q^S$  есть

$$\begin{aligned} T q^S &= \frac{\varkappa (\nabla T)^2}{T} - q'^K = \\ &= \frac{\varkappa (\nabla T)^2}{T} + \frac{\eta}{2} \{\nabla, \mathbf{v}\}_{ik} \{\nabla, \mathbf{v}\}_{ik} + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2, \end{aligned} \quad (2.10e)$$

где скорость диссипации кинетической энергии  $q'^K$  выписана в (2.9c). Энтропия во всём образце не может уменьшаться, то есть выражение (2.10e), будучи проинтегрированным по всему объёму тела, должно быть неотрицательным. Ввиду произвольности выбираемого объёма это эквивалентно локальному требованию  $q^S > 0$ . Поэтому все три диссипативных коэффициента должны быть положительны,

$$\varkappa, \eta, \zeta > 0,$$

хотя это можно было сказать уже и раньше, исходя из частного применения этого же принципа неумножения энтропии. Действительно, коэффициенты вязкости должны быть положительны, поскольку положительной должна быть скорость диссипации кинетической энергии в тепло  $-q'^K$ , см. (2.9b). Коэффициент теплопроводности должен быть положительным, поскольку тепло должно передаваться всегда от более нагретого тела к менее нагретому, а не наоборот.

Уравнение на изменение объёмной плотности энтропии (2.10c) можно переписать в терминах лагранжевой производной удельной энтропии (напомним, что объёмная плотность энтропии  $\rho^S$  и удельная энтропия  $S$  связаны соотношением  $\rho S = \rho^S$  (2.7c)):

$$\begin{aligned} T \frac{dS}{dt} &= \frac{T}{\rho} (q^S - \operatorname{div} \mathbf{j}'^S) = \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \operatorname{div} (\varkappa \nabla T) + \sigma'_{ik} \partial_i v_k \right) = \\ &= \frac{\operatorname{div} (\varkappa \nabla T)}{\rho} + \frac{\eta}{2\rho} \{\nabla, \mathbf{v}\}_{ik} \{\nabla, \mathbf{v}\}_{ik} + \frac{\zeta}{\rho} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \end{aligned} \quad (2.10f)$$

Величина  $T dS/dt$  есть удельная скорость выделения тепла вследствие диссипативных процессов. Уравнение (2.10f) следует называть уравнением на перенос тепла.

#### 2-3.2.2 Перенос полной энергии

Поскольку полная энергия сохраняется, то скорость изменения плотности полной энергии со временем есть полная дивергенция,

$$\partial_t \rho^{E+K+U} = -\operatorname{div} \mathbf{j}^{E+K}. \quad (2.10g)$$

Поток полной энергии  $\mathbf{j}^{E+K}$  получим, если сложим правые части (2.9b), (2.10b) и (2.7f) для  $\partial_t \rho^U$ , получаем, что полный поток энергии состоит из бездиссипативной

части (2.7j), ранее полученной при рассмотрении идеальной жидкости, и диссипативной части  $j_i^{E+K}$ , отсутствующей в идеальной жидкости:

$$j_i^{E+K} = \rho v_i \left( \frac{v^2}{2} + \mathcal{W} + \varphi \right) + j_i^{E+K}, \quad (2.10h)$$

$$j_i^{E+K} = -v_k \sigma'_{ik} - \kappa \partial_i T. \quad (2.10i)$$

Использованный процесс выделения полной дивергенции формально является неоднозначной операцией. Однако если переписать уравнение (2.10g) в интегральной форме, оно должно представлять собой работу внешних сил. Это требование однозначно фиксирует выражение для потока энергии, а вместе с ним, и выражение для скорости производства энтропии.

### 2-3.2.3 Уравнение на поле температуры

Для того, чтобы написать уравнение на поле температуры  $T(t, \mathbf{r})$ , воспользуемся термодинамическими соотношениями

ношениями

$$T dS = C_V dT + T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_V d\mathcal{V} = \quad (2.10j)$$

$$= C_P dT - T \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \Big|_P dP, \quad (2.10k)$$

где  $C_V, C_P$  — удельные теплоёмкости при постоянных объёме и давлении (в СГС размерность 1/г), а  $\mathcal{V} = 1/\rho$  — удельный объём. Уравнение (2.10f) в терминах температуры может быть переписано в видах

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{\mathcal{V} T}{C_V} \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_V \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{T}{C_V} \frac{dS}{dt} = \quad (2.10l)$$

$$= \frac{T}{C_P} \frac{dS}{dt} + \frac{T}{C_P} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \Big|_P \frac{dP}{dt}. \quad (2.10m)$$

Первое слагаемое в выражении (2.10l) соответствует идеальной жидкости, второе появляется при учёте диссипационных процессов.

## §2-4. Гидростатика

Гидростатика изучает состояние покоя жидкости, когда во всём пространстве  $\mathbf{v} = 0$ .

Рассмотрим сначала изотермическую жидкость, когда во всём пространстве температура одна и та же и равна  $T$ . Жидкость находится во внешнем потенциале, так что внешняя сила  $\mathbf{f}$  в уравнении Навье-Стокса (2.8f) потенциальна,

$$\mathbf{f} = -\rho \operatorname{grad} \varphi. \quad (2.11a)$$

Тогда из того же уравнения (2.8f) ввиду равенства нулю скорости следует, что

$$dP(T, \rho) = -\rho d\varphi, \quad (2.11b)$$

$$d\zeta = -d\varphi, \quad \zeta + \varphi = \text{const.}$$

Мы воспользовались равенством  $d\zeta = dP/\rho$  (2.7a) для приращения удельного химического потенциала  $\zeta$  при постоянной температуре. Величины с нижним индексом '0' соответствуют некоторой точке в пространстве. Заметим, что давление (или плотность) согласно (2.11b) является однозначной функцией потенциала.

Равенство (2.11b) соответствует распределению Гиббса. Например, для идеального одноатомного газа химический потенциал логарифмически зависит от концентрации молекул  $n$ ,

$$\zeta = \frac{T}{m} \ln \left( (2\pi)^{3/2} \frac{n \hbar^3}{p_T^3} \right), \quad (2.11c)$$

где тепловой импульс  $p_T = \sqrt{mT}$ , а  $m$  — масса молекулы газа. Поэтому интегральное равенство (2.11b) означает, что концентрация газа зависит экспоненциально от значения потенциала,

$$n = n_0 \exp \left( -\frac{\varphi - \varphi_0}{T/m} \right). \quad (2.11d)$$

Теперь, что если температура неоднородна в пространстве? Эта ситуация статистически нестационарна и реализуется, если на границе жидкости установлены неоднородные в пространстве граничные условия. Уравнение (2.11b) в дифференциальной форме приобретает вид

$$\frac{\partial P}{\partial T} \Big|_\rho dT + \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_T d\rho + d\varphi = 0. \quad (2.11e)$$

Для того, чтобы это уравнение было разрешимо, требуется, все три величины  $T, \rho, \varphi$  были функциями одной. Иначе говоря, в том числе температура должна быть однозначными функциями потенциала,  $T = T(\varphi)$ . В противном случае статическое состояние недостижимо. Если же потенциал отсутствует, то условием равновесия является однородность давления в пространстве,  $P = \text{const.}$

## §2-5. Несжимаемое изотермическое течение

Несжимаемая жидкость — это жидкость, у которой коэффициент изотермической сжимаемости можно принять равным нулю,

$$\beta \equiv -\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \Big|_T = 0. \quad (2.12a)$$

Рассмотрим самую простую ситуацию, когда во всём объёме температура жидкости однородна. Тогда в процессе течения у несжимаемой жидкости не изменяется массовая плотность  $\rho$ , оставаясь постоянной во всей жидкости. И уравнения непрерывности (2.4a) следует, что условие несжимаемости тождественно равно условию бездивергентности поля скорости жидкости,

$$\rho = \text{const}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (2.12b)$$

Распределение давления  $P(t, \mathbf{r})$  в каждый момент времени определяется этим условием.

В уравнении Навье-Стокса (2.8f) остаётся только коэффициент первой динамической вязкости  $\eta$ . Вместо этого коэффициента часто используют коэффициент кинематической вязкости

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

В результате уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости приобретает вид

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad (2.12c)$$

которое может быть переписано также и в виде

$$\partial_t \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = -\text{grad} \left( \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad (2.12d)$$

Вязкий тензор напряжений (2.8a) равен

$$\sigma'_{ik} = \rho \nu (\partial_i v_k + \partial_k v_i). \quad (2.12e)$$

Давление удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta P = -\rho \partial_i \partial_k (v_i v_k) + \text{div } \mathbf{f} = -\rho (\partial_i v^k) (\partial_k v_i) + \text{div } \mathbf{f}. \quad (2.12f)$$

Уравнение на завихренность для несжимаемой жидкости может быть получено из уравнения Навье-Стокса (2.12c)

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad \text{or} \quad (2.12g)$$

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (2.12h)$$

сравни со случаем сжимаемой жидкости (2.15a). Второй вариант записи уравнения (2.12h) следует непосредственно из (2.6f), в котором фигурирует вектор Ламба

$[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}]$ , см. (2.6e). По-прежнему, если течение в некоторый момент является потенциальным,  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , то согласно (2.12g) в последующие моменты времени оно таково и останется. Однако теперь ненулевая завихренность может возникнуть на границах области течения, передаваясь оттуда в объём посредством вязкости (диффузионным образом).

**Спиральность.** В идеальной несжимаемой жидкости сохраняется интегральная величина

$$H_f = \int d^3r h_f, \quad h_f = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad (2.13)$$

называемая *спиральностью* (*helicity*).

**Перенос энергии.** При течениях несжимаемой жидкости конвертация кинетической энергии  $\rho^K = \rho v^2/2$  во внутреннюю энергию  $\rho^E$  происходит только за счёт действия вязких сил:

$$\partial_t \rho^K = -\partial_i \left( v_i (\rho^K + P) - \sigma'_{ik} v_k \right) - \frac{\sigma'_{ik} \sigma'_{ik}}{2\eta} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.14a)$$

сравни с (2.9b, 2.7f). Для идеальной жидкости (2.14b) становится законом сохранения кинетической энергии. Диссипативный член (второе слагаемое в правой части (2.14b)) всегда положителен, являясь объёмной плотностью мощности диссипации кинетической энергии в тепловую; его можно также переписать в виде  $-\sigma'_{ik} \partial_i v_k$ .

Если сила  $\mathbf{f}$  потенциальна,  $\mathbf{f} = -\rho \text{grad } \varphi$ , то (2.14b) переписывается в виде

$$\partial_t \rho^K = -\partial_i \left( v^i (\rho^K + P + \rho \varphi) - \sigma'_{ik} v^k \right) - \sigma'_{ik} \partial_i v_k. \quad (2.14b)$$

Отсюда вытекает, что полная кинетическая энергия течения в идеальной несжимаемой жидкости может переходить в потенциальную только на границе течения. Такая трансформация имеет место, например, в случае поверхностных волн.

### 2-5.1 Сохранение циркуляции скорости

В этом пункте полагаем жидкость идеальной.

В случае несжимаемого течения уравнение на завихренность (2.6d) оказывается однородным относительно завихренности. Обобщим сейчас рассмотрение на сжимаемые течения, в которых все термодинамические потенциалы зависят только от одной переменной (за которую можно взять давление  $P$ ) — в таких течениях последний член в уравнении на завихренность (2.6d) также обращается в ноль, т.е.  $(\text{grad } P)/\rho$  в уравнении Навье-Стокса (2.8e) является полным градиентом. Подобное положение дел имеет место для рассмотренных ниже изэнтропийной жидкости и баротропного течения,

см. ниже Пункт 2-7.1). Итак, уравнение на завихренность в рассматриваемых случаях

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.15a)$$

Отметим, что уравнение на завихренность (2.15a) сохраняет свой вид, если на жидкость действует потенциальная сила.

Возможно дать геометрическую интерпретацию уравнению (2.15a) на завихренность. А именно, рассмотрим некоторый лагранжев элемент жидкости с траекторией  $\mathbf{r}(t)$ . Этот элемент несёт с собой завихренность  $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{r})$ . Согласно геометрической интерпретации, эта завихренность является ‘вмороженной’ в поток (или в элемент жидкости).

Сперва будем считать течение несжимаемым,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , и рассмотрим лагранжеву частицу с траекторией  $\mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}(t)$  близкую к уже выбранной, такую, что в некоторый момент времени

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha \rho \delta \mathbf{r}. \quad (2.15b)$$

Тогда это соотношение пропорциональности будет неизменным во все моменты времени с постоянным коэффициентом  $\alpha$ . Действительно, динамическое уравнение на относительное смещение лагранжевых траекторий

$$\frac{d}{dt} \delta r_i = \frac{\partial v_i}{\partial r_k} \delta r_k, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (2.15c)$$

что совпадает с уравнением (2.15a) при замене  $\delta \mathbf{r} \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}$ . Таким образом, поток растягивает и вращает вектор завихренности так же, как и малый вектор в потоке, исходно сонаправленный вектору завихренности.

Теперь, если течение сжимаемо, то завихренность дополнительно изменяется, как изменяется плотность жидкости, см. уравнение непрерывности (2.4b). Поэтому коэффициент  $\alpha$  в (2.15b) по-прежнему остаётся постоянным.

**Теорема Кельвина.** Изложенная геометрическая интерпретация уравнения (2.15a), переписанная в интегральном виде, называется теоремой Кельвина (*William Thomson, 1st Baron Kelvin*).

Предполагаем течение несжимаемым. Выберем произвольный замкнутый контур  $\mathbf{r}(t, s)$  в жидкости, где параметр  $0 \leq s \leq 1$  и  $\mathbf{r}(t, 1) = \mathbf{r}(t, 0)$ . Этот контур увлекается вместе с жидкостью,

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t, s)}{\partial t} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t, s)). \quad (2.15d)$$

Непосредственно проверим, то циркуляция

$$\Gamma = \int_0^1 ds \left( \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t, s)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(t, s)}{\partial s} \right) \equiv \oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) \quad (2.15e)$$

сохраняется во времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \right) + \int_0^1 ds \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right) = \\ &= - \oint \frac{(\nabla P \cdot d\mathbf{r})}{\rho} + \oint \frac{(\nabla v^2 \cdot d\mathbf{r})}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.15f)$$

Связь с (2.15b) устанавливается, если переписать контурный интеграл (2.15e) через поверхностный интеграл по теореме Стокса:

$$\Gamma = \int d^2 S (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}). \quad (2.15g)$$

Предполагается, что поверхность также переносится потоком жидкости. Поскольку объём элемента жидкости сохраняется и пропорционален равен  $d^2 S |\delta \mathbf{r}|$  в терминах уравнения (2.15b), то согласно этому же уравнению, под интегралом (2.15g) стоит постоянная по времени величина.

## 2-5.2 Течение в ограниченной области

Пусть течение вязкой жидкости происходит в области  $\mathcal{V}$ , ограниченной твёрдыми материальными стенками. Границу области обозначим  $\partial \mathcal{V}$ .

### 2-5.2.1 Граничные условия

На границе имеют место следующие условия:

**Условие непротекания.** Условием непротекания называется условие равенства нулю нормальной компоненты скорости на границе:

$$v_n \equiv (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})|_{\partial \mathcal{V}} = 0. \quad (2.16a)$$

Если течение можно считать не вязким, так что оно моделируется уравнением Эйлера, то граничные условия исчерпываются условием непротекания.

**Условие прилипания:** на границе касательные компоненты скорости также равны нулю. Физически это следует из того, что в непрерывной среде с диссипацией не может быть скачков скорости. Итак, вместо одного граничного условия (2.16a) теперь имеем d граничных условий

$$\mathbf{v}|_{\partial \mathcal{V}} = 0. \quad (2.16b)$$

**Вязкая несжимаемая жидкость.** Если жидкость вязкая и несжимаемая, то нормальная производная нормальной компоненты скорости на границе равна нулю,

$$\partial_n v_n \equiv n_i n_k \partial_i v_k|_{\partial \mathcal{V}} = 0. \quad (2.16c)$$

Таким образом, если в общем случае тангенциальные компоненты скорости возрастают от нулевого значения

на границе линейным образом с расстоянием до границы, то нормальная компонента растёт квадратичным

образом ...

## §2-6. Квази-несжимаемое термическое течение

Рассмотрим течение, скорости в котором малы по сравнению со скоростью звука, но при этом температура распределена неоднородно в пространстве. Таким образом, возможно пренебречь изменением плотности жидкости  $\rho$  вследствие вариации давления  $P$ , но нельзя пренебречь этим изменением вследствие вариации поля температуры  $T$ . Поэтому рассмотрим модельную жидкость, у которой изотермическая сжимаемость равна нулю, то есть верно (2.12a).

У такой модельной задачи имеется встроенное противоречие с исходными гидродинамическими уравнениями. Действительно, с одной стороны, плотность  $\rho$  удовлетворяет уравнению непрерывности (2.4b). Из уравнения непрерывности, казалось бы, может быть найдена и температура по связи  $\rho = \rho(T)$ . Однако, с другой стороны, температура сама удовлетворяет уравнению на перенос тепла (2.10f), которое содержит диссипативные части в потоке и источники в правой части. Оба этих уравнения не являются совместными в общем случае. (В связи с этим отметим, что равенство нулю (2.12a) изотермической сжимаемости,  $\beta = 0$ , может быть только приближением. Строго говоря, это невозможно по соображениям термодинамической устойчивости, см. [Gouin & Ruggeri, 2012].)

Поэтому предел нулевой изотермической сжимаемости может использоваться только при наличии малых параметров в задаче. Первым малым параметром является безразмерная вариация температуры по объёму, так что она вызывает относительно малое отклонение плотности. Обозначим изобарический температурный коэффициент расширения

$$\alpha \equiv \left. \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial T} \right|_P. \quad (2.17a)$$

Вариации температуры и плотности обозначим величинами с волной. Связь между плотностью и температурой линеаризуем по малым отклонениям:

$$T = T_0 + \tilde{T}, \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad \tilde{\rho} = -\rho_0 \alpha \tilde{T}. \quad (2.17b)$$

Условие относительной малости вариации плотности есть

$$\tilde{\rho} \ll \rho_0, \quad \Rightarrow \quad \alpha \tilde{T} \ll 1, \quad (2.17c)$$

Невозмущённые плотность  $\rho_0$  и температура  $T_0$  не зависят от координаты. Однако гидростатическое давление  $P_0$  от координаты зависит, если есть внешний потенциал,

$$P = \bar{P} + \rho_0 \tilde{p}, \quad \bar{P} = P_0 - \rho_0 \varphi, \quad (2.17d)$$

где  $P_0$  — константа. Вторым малым параметром является малость изменения потенциала в области течения, означающая, что связанное с потенциалом изменение плотности мало по сравнению с её изменением вследствие вариации температуры. Условием этого является неравенство

$$\beta \rho \varphi \sim \varphi / c_s^2 \ll \alpha \tilde{T}, \quad (2.17e)$$

где  $c_s$  — скорость звука. Предполагается, что нулевое значение потенциал  $\varphi$  достигает где-то внутри области течения.

Перейдём к выводу динамических уравнений. В правой части уравнения Навье-Стокса (2.8e) сумма членов с давлением и внешней силы приближённо равна

$$-\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi \approx -\nabla \tilde{p} + \alpha \tilde{T} \nabla \varphi, \quad (2.17f)$$

поскольку мы опустили слагаемое, имеющее порядок  $\alpha \tilde{T} \nabla p$ , как относительно малое. Второе слагаемое  $\alpha \tilde{T} \nabla \varphi$  в (2.17f) называется *силой плавучести* (*buoyancy force*). Сила плавучести, возникающая из-за неоднородностей в распределении плотности, определяет воздействие неоднородностей в пространственном распределении температуры на течение. Например, сила плавучести является источником движения в конвективных течениях. Таким образом, после того, как мы получили правую часть (2.17f), мы можем в дальнейших вычислениях пренебречь вариациями плотности, считая течение бездивергентным:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.17g)$$

Условие (2.17g) определяет вариацию давления  $p$  в (2.17f). Уравнение Навье-Стокса приобретает вид

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} \tilde{p} + \alpha \tilde{T} \operatorname{grad} \varphi + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (2.17h)$$

Подчеркнём, что, согласно сделанным приближениям, поток массы есть

$$\mathbf{j}_m = \rho_0 \mathbf{v}, \quad (2.17i)$$

так что дивергенция этого потока равна нулю.

Наконец, уравнение на перенос температуры следует из общего уравнения переноса тепла (2.10f). Независимость термодинамических величин от давления означает, что оно с их точки зрения остаётся постоянным. Поэтому изменение удельной энтропии  $dS$  связано с изменением температуры через удельную теплоёмкость при постоянном давлении,

$$T dS = C_P dT, \quad \Rightarrow \quad T_0 \tilde{S} = C_P \tilde{T}, \quad (2.17j)$$

Динамическое уравнение на поле температуры потому имеет вид

$$\partial_t \tilde{T} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{T} = \chi \Delta \tilde{T} + \frac{\sigma'_{ik} \partial_i v^k}{\rho_0 C_P}, \quad \chi = \frac{\varkappa}{\rho_0 C_P}. \quad (2.17k)$$

Величина  $\chi$  называется *коэффициентом температуропроводности*. Для установления статистических свойств динамики отклонений температуры от среднего профиля полезным оказывается уравнение на квадрат температуры:

$$\partial_t \frac{\tilde{T}^2}{2} + \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{T}^2}{2} \mathbf{v} - \chi \nabla \tilde{T}^2 \right) = -\chi (\nabla \tilde{T})^2 + \frac{\sigma'_{ik} \partial_i v^k \tilde{T}}{\rho_0 C_P}. \quad (2.17l)$$

В рамках написанных уравнений (2.17g, 2.17h, 2.17k) не существует величины, которая сохранялась бы в качестве полной энергии, как это имеет место для точных уравнений, см. (2.10g). Действительно, потенциальная энергия неизменна, поскольку неизменна плотность жидкости (например, в [Vallis, 2017, § 2.4.3] принимается, что при подсчёте потенциальной энергии следует учитывать отклонение плотности от её равновесного значения, но это не изменяет нашего конечного вывода). В балансе кинетической энергии  $\rho^K = \rho_0 v^2/2$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho^K + \partial_i \left( \rho^K v^i + \rho_0 \tilde{p} v^i - v_k \sigma'_{ik} \right) = \\ = \rho_0 \alpha \tilde{T} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi - \rho_0 \nu \partial_i v^k \sigma'_{ik}. \end{aligned} \quad (2.17m)$$

есть источник  $\rho_0 \alpha \tilde{T} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi$ . В балансе энергии этот источник должен компенсироваться таким же источником для внутренней энергии, взятой с обратным знаком. Плотность внутренней энергии  $\rho^E$  может зависеть

только от локальной температуры  $\tilde{T}$  (и должна быть линейна по ней в рамках сделанных приближений) и координаты  $\mathbf{r}$  посредством гидростатической части давления  $-\rho_0 \varphi$ . Выражением, удовлетворяющим этим требованиям, является, например,  $\rho^E = \rho_0 (C_p - \alpha \varphi) \tilde{T}$ . Однако динамика поля температуры, определяемая уравнением (2.17k), имеет в правой части диссипативные члены, которые при подстановке зависимости  $\rho^E(\tilde{T}, \mathbf{r})$  зацепляются за внешний потенциал  $\varphi$ .

Однако, поток энергии (тепла) с точки зрения практических приложений является одним из центральных предметов интереса при изучении термической конвекции. Поэтому для определения выражения для потока энергии надо стартовать с общего выражения (2.10g), делая в нём приближения, соответствующие сделанным нами здесь приближениям и имеющимся дополнительным малым параметрам. Самым простым вариантом является

$$\mathbf{j}^{E+K+U} = \rho_0 C_p \tilde{T} \mathbf{v} - \varkappa \nabla \tilde{T}. \quad (2.17n)$$

Это выражение годится, если вклад в поток энергии переноса кинетической энергии пренебрежимо мал; при этом вклад вязкой диссипации в локальный баланс тепла также пренебрежимо мал, т.е. следует откинуть последнее слагаемое в правой части (2.17k). Поскольку в (2.17n) перенос энергии происходит только за счёт переноса внутренней энергии и термодиффузии, то правую часть (2.17n) говорят как о полном потоке тепла.

Уравнения (2.17h, 2.17g, 2.17k) описывают термическое течение квази-несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. Построенное приближение называется *приближением Буссинеска* (*Boussinesq approximation* [Boussinesq, 1903] or *Oberbeck-Boussinesq approximation* [Oberbeck, 1879]).

## §2-7. Частные виды течений и модели жидкости

В общем случае система уравнений описывающая течение идеальной жидкости не поддаётся аналитическому интегрированию. Для понимания физики течений полезно рассмотреть частные виды течений, описание которых существенно проще общего случая и потому допускает аналитический анализ.

Одним из важных параметров модели, описывающей течение, является форма зависимости давления от состояния жидкости. В ситуации общего положения  $P = P(\rho, \rho^s/\rho)$  или  $P = P(\rho, T)$ . Если нельзя пренебречь ни зависимостью давления от плотности, ни от температуры, то такое течение называют *бароклинным течением* (*baroclinic flow*).

### 2-7.1 Изэнтропическое течение и баротропная жидкость

*Изэнтропическим течением* (*isentropic flow*) называется течение идеальной жидкости, в которой удельная энтропия во всём пространстве одна и та же,

$$S = \text{const.}$$

Для такого течения уравнение термодинамического состояния сводится к тому, что давление оказывается функцией только плотности,  $P = P(\rho)$ .

Условие изэнтропичности течения можно понимать так: если идеальную изэнтропическую жидкость привести в состояние покоя, а внешний потенциал отсутствует, то во всём объёме жидкости температура окажется одинаковой.

Согласно общему выражению (2.7a) для приращения удельной энтальпии в изэнтропийной жидкости

$$-\frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla \mathcal{W}. \quad (2.18a)$$

Таким образом, ротор от этого слагаемого в уравнении Эйлера (2.6c) даёт нуль. По-другому про это же можно сказать, что поскольку один из термодинамических потенциалов — удельная энтропия  $\mathcal{S}$  — неизменен во всём пространстве, то градиенты от всех термодинамических величин коллинеарны друг другу. Поэтому последнее слагаемое в правой части уравнения на завихренность (2.6d) обращается в нуль. В результате мы приходим к уравнению (2.15a) на завихренность, которое приводит к сохранению циркуляции скорости.

*Баротропной жидкостью (barotropic fluid)* называют модельную жидкость, у которой, по определению, давление зависит только от плотности,  $P = P(\rho)$ . При этом течение может быть не изэнтропическим, и, более того, жидкость может быть не идеальной, так что в ней могут происходить диссипативные процессы, см. § 2-3. Тогда, также как и в (2.18a), член с давлением в уравнении Навье-Стокса можно переписать в виде полного градиента,

$$-\frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla f(\rho), \quad (2.18b)$$

где функция  $f$ , однако, уже может не иметь простой термодинамической интерпретации. Поэтому уравнение (2.15a) на завихренность верно и для баротропной жидкости.

Несжимаемую жидкость можно считать пределом баротропной жидкости, у которой производная давления по плотности неограниченно велика,  $dP/d\rho \rightarrow \infty$ .

## 2-7.2 Стационарное течение

*Стационарным течением* называется независящее от времени течение, когда  $\partial_t \mathbf{v} = 0$ . Для идеальной жидкости, которая далее и рассматривается, это означает, что и временная производная от термодинамических величин также равна нулю. Уравнение Эйлера (2.6c) для стационарного потока не содержит временной производной,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}. \quad (2.19a)$$

Из выражения для переноса энергии (2.7i) следует, что в этом случае дивергенция потока полной энергии равна нулю,  $\text{div} \mathbf{j}^{E+K} = 0$ . Если к этому добавить уравнение непрерывности  $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ , то мы получим, что величина, стоящая в качестве множителя при  $\rho \mathbf{v}$  в выражении для потока энергии  $\mathbf{j}^{E+K}$ , не изменяется вдоль линии тока:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\rho^E}{\rho} + \frac{P}{\rho} + \varphi \right) = 0,$$

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{W} + \varphi = \text{const} \quad \text{along a streamline.} \quad (2.19b)$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли (Bernoulli equation)*. По сути оно выражает собой закон сохранения энергии для идеальной жидкости, и в дифференциальной форме записывается в виде

$$v dv + \left( d\mathcal{W} = \frac{dP}{\rho} \right) + d\varphi = 0, \quad (2.19c)$$

где приращения всех величин берутся вдоль линии тока (это уравнение можно получить непосредственно из (2.19a), спроектировав его на вектор скорости  $\mathbf{v}$ ). Отметим, что вообще говоря константа, стоящая в правой части уравнения Бернулли (2.19b), своя для каждой линии точка.

Помимо энергии, в идеальной жидкости сохраняется также энтропия. Поэтому при стационарном течении удельная энтропия остаётся постоянной вдоль линии тока,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \quad \text{along a streamline,} \quad (2.19d)$$

см. (2.7c).

## 2-7.3 Потенциальное изэнтропийное (баротропное) течение

Рассмотрим течение с нулевой завихренностью,  $\boldsymbol{\omega} = 0$ . Тогда скорость  $\mathbf{v}$  можно параметризовать одной скалярной функцией — потенциалом  $\phi$ :

$$\mathbf{v} = -\text{grad} \phi, \quad (2.20)$$

Такое течение называется *потенциальным (potential flow)*, для него завихренность всюду равна нулю,  $\boldsymbol{\omega} = 0$ . Если в данный момент течение потенциально, то согласно уравнению на завихренность (2.6d), это не означает, что оно и дальше будет всегда оставаться таковым. Для того, чтобы течение оставалось по-прежнему потенциальным, нужны специальные условия, см. Пункт 2-7.1 — либо течение должно быть изэнтропийным, либо жидкость должна быть баротропной. Ниже мы предполагаем выполненным одно из этих условий.

Пусть жидкость несжимаема. Уравнение Эйлера (2.6c) с потенциальной внешней силой (2.7d) для потенциального течения переписывается в виде

$$\text{grad} \left( -\partial_t \phi + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi \right) = 0 \quad (2.21a)$$

При этом условии несжимаемости приводит к уравнению Лапласа на потенциал:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 : \quad \Delta \phi = 0. \quad (2.21b)$$

Не изменяя самой скорости, к потенциалу скорости  $\phi$  всегда можно добавить функцию, зависящую только от времени. Поэтому уравнение (2.21a) интегрируется до

$$-\partial_t \phi + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi = 0. \quad (2.21c)$$

Это уравнение есть уравнение Бернулли для несжимаемого потенциального течения. Отметим, что уравнение Бернулли (2.21c) верно и для вязкой несжимаемой жидкости в областях, где завихренность равна нулю. Такое приближение имеет место быть, если возможно пренебречь вязким переносом завихренности из областей с ненулевым её значением, смотри уравнение (2.12g).

Если же течение изэнтропийное, но сжимаемое, то согласно (2.18a) в уравнении Бернулли (2.21c) надо сделать замену

$$\frac{P}{\rho} \rightarrow \mathcal{W} = \frac{\rho^E + P}{\rho} : \\ -\partial_t \phi + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \mathcal{W} + \varphi = 0. \quad (2.21d)$$

Левая часть уравнения совпадает с уравнением Бернулли для стационарного течения (2.19b). Однако здесь в (2.21d) константа интегрирования одна и та же для всех линий тока в отличие от (2.19b). Уравнение Бернулли для изэнтропийной сжимаемой жидкости используют, например, для описания распространения звуковых волн в жидкости, см. § 4-1.

## 2-7.4 Задачи

### 2-7.4.1 Потенциальное течение

• **Задача 1:** На дне неограниченного по горизонтали водоёма с плоским дном глубины  $d$  в точке  $\{x, y\} = 0$

находится точечный источник жидкости, имеющий постоянный во времени расход жидкости  $Q$  единиц объёма в единицу времени. Установившееся течение можно считать потенциальным, а саму жидкость — идеальной. Какова максимальная высота поднятия уровня воды над источником? Качественно опишите установившуюся форму поверхности. Найдите аналитически её профиль на расстояниях, больших по сравнению с глубиной. Число Фруда (максимальный угол наклона поверхности) считайте малым; ускорение свободного падения равно  $g$ .

• **Задача 2:** Кумулятивный эффект (эффект Манро, Manroe effect).

Задача 1.14 из [Falkovich, 2018]

• **Задача 3:** Определите частоту малых сферически-симметричных колебаний пузырька воздуха в жидкости, имеющего в равновесии сферическую форму с радиусом  $a$  (давление жидкости в покое равно  $P_0$ ). Течение жидкости считать потенциальным, саму жидкость — идеальной несжимаемой, массовую плотность газа  $\rho_a$  в пузырьке пренебрежимо малой по сравнению с плотностью жидкости  $\rho$ ,  $\rho_a \ll \rho$ . Считать, что в каждый момент газ в пузырьке находится в термодинамическом равновесии с окружающей жидкостью (имеет по времени постоянную температуру). Каков будет ответ, если полагать, что течение газа в шарике является изэнтропийным (показатель адиабаты газа равен  $\gamma$ )? Посчитайте комплексную частоту колебаний в случае, если вязкостью жидкости пренебрегать нельзя.

# ТЕЧЕНИЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

## §3-1. Течение при малых числах Рейнольдса

Если течение имеет достаточно малый масштаб, или оно достаточно медленное, что в уравнении Навье-Стокса (2.8f) нелинейное слагаемое  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  оказывается относительно малым и им можно пренебречь. Пусть масштаб течения есть  $L$ , а амплитуда скорости течения порядка  $v$ . Тогда критерием малости переносного (нелинейного) члена является малость числа Рейнольдса

$$\text{Re} \sim \frac{|(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}|}{|\nu\Delta\mathbf{v}|} \sim \frac{vL}{\nu} \ll 1. \quad (3.1a)$$

Итак, опустим нелинейной слагаемое в уравнении Навье-Стокса и примем, что жидкость является несжимаемой. Получим уравнение

$$\rho\partial_t\mathbf{v} = -\nabla P + \eta\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.1b)$$

Временная производная  $\partial_t\mathbf{v}$  важна только в том случае, если внешняя сила  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ , приводящая жидкость в движение, достаточно быстро зависит от времени.

### 3-1.1 Стационарное уравнение Стокса

Если внешняя сила  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  в (3.1b) не зависит от времени, то уравнение Стокса для несжимаемой жидкости становится стационарным,

$$\nabla P - \eta\Delta\mathbf{v} = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.2a)$$

Взяв дивергенцию от уравнения Стокса (3.2a), мы получим уравнение на давление:

$$\Delta P = \text{div } \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (3.2b)$$

Взяв лапласиан от уравнения Стокса (3.2a) в области, где внешняя сила отсутствует, мы получим *бигармоническое уравнение* на скорость

$$\Delta\Delta\mathbf{v} = 0. \quad (3.2c)$$

#### 3-1.1.1 Теорема взаимности

Теорема взаимности формулируется следующим образом. Рассмотрим две задачи на течение жидкости, подчиняющейся уравнению Стокса, в области  $V$ , имеющей границу  $\Gamma$ . Каждая задача характеризуется своими граничными условиями и внешней силой; обозначим скорость жидкости, поток импульса и внешнюю силу для

двух задач  $\mathbf{u}$ ,  $\hat{\Pi}_u$ ,  $\mathbf{f}_u$  и  $\mathbf{v}$ ,  $\hat{\Pi}_v$ ,  $\mathbf{f}_v$  соответственно. Нетрудно показать, что из того, что эти величины удовлетворяют уравнению Стокса для несжимаемой жидкости, следует так называемая теорема взаимности:

$$\int_{\Gamma} dS^k (\Pi_v^{ik} u^k - \Pi_u^{ik} v^k) = \int_V dV (f_u^i v^i - f_v^i u^i). \quad (3.2d)$$

#### 3-1.1.2 Функции Грина

Решения стационарного уравнения Стокса для давления и скорости можно записать через функции Грина

$$P = \int \mathcal{D}^i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_{\text{ext}}^j(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (3.2e)$$

$$v^i = \frac{1}{\eta} \int \mathcal{G}^{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_{\text{ext}}^j(\mathbf{r}') d^3r',$$

$$\begin{aligned} \Pi^{ik} &= P\delta^{ik} - \eta(\partial_i v^k + \partial_k v^i) = \\ &= \int \mathcal{T}^{ikj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_{\text{ext}}^j(\mathbf{r}') d^3r', \end{aligned}$$

Положим, что область трёхмерного течения неограничена. Предположение о неограниченности оправдано, как мы увидим ниже, тем, что в трёхмерном течении поле скорости, индуцированное воздействием точечной силы, спадает достаточно быстро (как  $1/r$ ) с удалением от точки приложения силы.

Если течение неограничено, то удобно перейти в Фурье-пространство, где функции Грина имеют вид:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{k}}^i = -\frac{ik^i}{k^2},$$

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{ij} = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathcal{G}^{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \frac{1}{k^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}}^{ijk} = i \frac{2k^i k^j k^k - k^i \delta^{jk} - k^j \delta^{ik} - k^k \delta^{ij}}{k^3}. \quad (3.2f)$$

Функция Грина в трёх-мерном пространстве

$$\mathcal{G}^{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right), \quad \mathcal{D}^i = \frac{1}{4\pi} \frac{r_i}{r^3}. \quad (3.2g)$$

Покажем, как можно выполнить обратное Фурье-преобразование для функции Грина  $\mathcal{G}^{ij}$ . Первое слагаемое в выражении (3.2f) для  $\mathcal{G}^{ij}$  имеет Фурье-первообраз  $\delta^{ij}/4\pi\eta r$ . Более сложным является вычисление первообраза для второго слагаемого. Введём малые  $\epsilon_1 \ll \epsilon_2 \ll 1/r$  для регуляризации подинтегрального выражения. Имеем последовательность вычислений:

$$\begin{aligned} -\int e^{i\mathbf{k}r} \frac{k^i k^j}{k^4} (d^3k) &= \frac{\partial_i \partial_j}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 + \epsilon_2^2} \frac{2 \sin(kr)}{k} = \\ &= -\frac{i \partial_i \partial_j}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk (e^{ikr} - e^{-ikr})}{(k^2 + \epsilon_2^2)(k + i\epsilon_1)} = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \partial_i \partial_j r = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{r^i r^j}{r^3} - \frac{\delta^{ij}}{r} \right). \end{aligned}$$

Первое равенство получено в результате проведения интегрирования по сферическим углам в  $\mathbf{k}$ -пространстве. При вычислении интеграла во второй строчке необходимо было разложиться до второго порядка по  $r$ ; при этом нулевой порядок равен нулю, первый порядок после деления на  $r$  и последующего дифференцирования даёт также нулевой вклад, и, таким образом, остаётся только второй порядок. Складывая Фурье-первообразы от обоих членов в (3.2f), приходим к (3.2g).

### 3-1.1.3 Аксиально-симметричные течения

Важным частным случаем являются аксиально-симметричные течения, в которых у скорости отсутствует азимутальная компонента. Упростим уравнение Стокса (3.2a) для этого случая.

Введём цилиндрические координаты  $\{r_\perp, \varphi, z\}$ , соответствующие симметрии течения. Удобно перейти в систему отсчёта, где границы обтекаемого тела неподвижны, в этой системе отсчёта, напомним, поле скорости есть  $\mathbf{u}$ . При необходимости мы также будем переходить к сферическим координатам  $\{r, \theta, \varphi\}$ . Отсутствие течения по азимуту означает, что в обеих системах координат скорость имеет только две ненулевых компоненты. В цилиндрических координатах этими компонентами являются  $u^\perp$  и  $u^z$ , которые в силу условия несжимаемости удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{r_\perp} \partial_\perp (r_\perp u^\perp) + \partial_z u^z = 0, \quad (3.3a)$$

где  $\partial_\perp \equiv \partial/\partial r_\perp$ . Поэтому всё поле скорости может быть параметризовано одной функцией, в качестве которой выберем функцию тока  $\psi$ :

$$u^\perp = \frac{1}{r_\perp} \partial_z \psi, \quad u^z = -\frac{1}{r_\perp} \partial_\perp \psi. \quad (3.3b)$$

Геометрический смысл так определённой функции тока следующий:  $-2\pi\psi(r_\perp, z)$  есть поток жидкости через кольцо радиуса  $r_\perp$ , ось которого совпадает с осью  $Oz$ , и

плоскость которого расположена на уровне  $z$ . Перепишем также уравнения (3.3a, 3.3b) в сферических координатах, имея ввиду возможное расширение равенств на любые криволинейные ортогональные системы координат, одной из которых является азимутальный угол  $\varphi$ :

$$\frac{h_r}{h} \partial_r \left( \frac{h}{h_r} u^r \right) + \frac{h_\theta}{h} \partial_\theta \left( \frac{h}{h_\theta} u^\theta \right) = 0, \quad (3.3c)$$

$$u^r = \frac{1}{r_\perp h_\theta} \partial_\theta \psi, \quad u^\theta = -\frac{1}{r_\perp h_r} \partial_r \psi, \quad (3.3d)$$

где  $h = h_r h_\theta h_\varphi$ , и для сферических координат коэффициенты Ламе  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$ ,  $h_\varphi = r \sin \theta$ .

В области, где на жидкость не действуют силы, скорость удовлетворяет бигармоническому уравнению (3.2c). Получим аналог этого уравнения в терминах функции тока. Для этого вычислим ротор от уравнения Стокса (3.2a), у которого по симметрии единственной ненулевой является  $\varphi$ -компонента. Вычисления будем производить в следующей последовательности для сокращения их объёма. Сначала посчитаем завихренность:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{e}_\varphi (\partial_z u^\perp - \partial_\perp u^z) = \frac{\hat{E}^2 \psi}{r_\perp}. \quad (3.3e)$$

Здесь введено традиционное обозначение

$$\begin{aligned} \hat{E}^2 &= r_\perp \partial_\perp \frac{1}{r_\perp} \partial_\perp + \partial_z^2 = \Delta - \frac{2}{r_\perp} \partial_\perp = \\ &= \partial_r^2 + \frac{\sin \theta}{r^2} \partial_\theta \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta, \end{aligned} \quad (3.3f)$$

а  $\mathbf{e}_\varphi$  есть единичный вектор, направленный по азимуту. Затем возьмём ротор от обеих частей уравнения Стокса в области, где внешняя сила отсутствует:

$$\begin{aligned} 0 = \text{rot } \Delta \mathbf{u} &= \Delta \text{rot } \mathbf{u} = \Delta \left( \mathbf{e}_\varphi \frac{\hat{E}^2 \psi}{r_\perp} \right) = \\ &= \mathbf{e}_\varphi \left( \Delta - \frac{1}{r_\perp^2} \right) \frac{\hat{E}^2 \psi}{r_\perp} = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r_\perp} \hat{E}^4 \psi. \end{aligned} \quad (3.3g)$$

Итак, аналогом бигармонического уравнения (3.2c) является

$$\hat{E}^4 \psi = 0. \quad (3.3h)$$

Если скорость достаточно быстро затухает при удалении от начала координат, возможно получить выражения для полной кинетической энергии течения в терминах функции тока и завихренности. Будем считать не ограничивая общности, что, по определению, функция

тока равна нулю на оси течения. Тогда

$$\begin{aligned}
 E &= \pi \int_0^\infty r_\perp dr_\perp \int dz ((u^z)^2 + (u^+)^2) = \\
 &= -\pi \int_0^\infty dr_\perp \int dz \varpi^\varphi \psi + \\
 &+ \frac{1}{2} \oint d^2S \frac{\psi}{r_\perp} (\mathbf{n}^z u^+ - \mathbf{n}^+ u^z).
 \end{aligned} \tag{3.3i}$$

Достаточно быстрое убывание скорости на далёких расстояниях означает, что поверхностный интеграл (в котором  $\mathbf{n}$  есть вектор нормали к поверхности) стремится к нулю при увеличении радиуса поверхности.

### 3-1.1.4 Двумерное течение

Мы рассматриваем планарное течение несжимаемой жидкости, так что у поля скорости  $\mathbf{v}$  есть только две

ненулевых компоненты. Условие несжимаемости накладывает связь  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  на эти две компоненты, так что двумерное поле скорости течения несжимаемой жидкости задаётся всего одной функцией, в качестве которой возьмём *функцию тока* (*stream function*)  $\psi$ :

$$v^\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \nabla_\beta \psi. \tag{3.4a}$$

Тогда, в частности, завихренность  $\omega$  поля скорости равна

$$\omega = \epsilon_{\alpha\beta} \nabla_\alpha v^\beta = -\Delta \psi. \tag{3.4b}$$

Уравнение Стокса в терминах функции тока переписывается в виде

$$\Delta \Delta \psi = \epsilon_{\alpha\beta} \nabla_\alpha f_{\text{ext}}^\beta, \tag{3.4c}$$

а давление определяется уравнением

$$\Delta P = \operatorname{div} \mathbf{F}_{\text{ext}}. \tag{3.4d}$$

## §3-2. Обтекание твёрдого шарика

Предположим, что твёрдый шарик движется в вязкой неподвижной жидкости настолько медленно, что течение обтекающей его жидкости подчиняется уравнению Стокса (3.2a). Уравнение Стокса линейно по скорости, поэтому для того, чтобы шарик равномерно и прямолинейно двигался со скоростью  $\mathbf{V}$ , к нему должна быть приложена сила  $\mathbf{F}$ , пропорциональная скорости:

$$\mathbf{V} = \mu \mathbf{F}, \quad \frac{1}{\mu} = 6\pi\eta a. \tag{3.5a}$$

где коэффициент  $\mu$  называется подвижностью. Линейность обратной подвижности по радиусу шарика  $a$  и вязкости жидкости  $\eta$  можно установить в том числе и по размерности. Для того, чтобы удостовериться в правильности коэффициента пропорциональности, надо найти поле скорости вокруг шарика.

**Решение в терминах поля скорости.** Найдём это поле скорости. Для определённости предположим, что в данный момент шарик находится в начале декартовой системы координат. Жидкость на далёких от шарика расстояниях неподвижна, так что там её скорость стремится к нулю. Полное поле скорости  $\mathbf{v}$  разделим на две составляющие,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{st}} + \mathbf{v}_a. \tag{3.5b}$$

Часть скорости  $\mathbf{v}_a$  убывает относительно быстро с увеличением расстояния до шарика, так что на далёких расстояниях остаётся только часть  $\mathbf{v}_{\text{st}}$ . Эта часть совпадает с решением уравнения Стокса (3.2a)

$$\nabla P - \eta \Delta \mathbf{v}_{\text{st}} = \delta(\mathbf{r}) \mathbf{F} \tag{3.5c}$$

для отклика на действие точечной силы,

$$v_{\text{st}}^i = \frac{1}{\eta} \mathcal{G}^{ij}(\mathbf{r}) F^j = \frac{F^i + (\mathbf{F}\mathbf{n})n^i}{8\pi\eta r} = \frac{V^i + (\mathbf{V}\mathbf{n})n^i}{8\pi\eta\mu r}, \tag{3.5d}$$

где единичный вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . Выписывая (3.5d), мы воспользовались определением (3.2e) для отклика поля скорости, выражением (3.2g) для функции Грина  $\mathcal{G}^{ij}$  и определением (3.5a) для подвижности.

Скорость  $\mathbf{v}_{\text{st}}$  удовлетворяет бигармоническому уравнению (3.2c), но не удовлетворяет гармоническому уравнению. На близких расстояниях от шарика к решению  $\mathbf{v}_{\text{st}}$  добавляется линейно-независимое решение  $\mathbf{v}_a$  уравнения Стокса (3.2a), которое удовлетворяет гармоническому уравнению, и потому не связано с изменением давления:

$$\Delta \mathbf{v}_a = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_a = 0. \tag{3.5e}$$

Нам нужно решение  $\mathbf{v}_a$  этого уравнения, убывающее при росте  $r$ , и имеющее аналогичную  $\mathbf{v}_{\text{st}}$  угловую зависимость:

$$\mathbf{v}_a = A a^3 \nabla(\mathbf{V}\nabla) \frac{1}{r} = A \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{V}\mathbf{n}) - \mathbf{V}}{(r/a)^3},$$

где  $A$  — пока неизвестный коэффициент.

Теперь запишем граничное условие на поверхности шарика

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \mathbf{v}|_{r=a} = (\mathbf{v}_{\text{st}} + \mathbf{v}_a)|_{r=a} = \\
 &= \left( \frac{1}{8\pi\eta\mu a} + 3A \right) (\mathbf{V}\mathbf{n})\mathbf{n} + \left( \frac{1}{8\pi\eta\mu a} - A \right) \mathbf{V}.
 \end{aligned} \tag{3.5f}$$

Требование обращения в ноль коэффициента при  $\mathbf{n}(\mathbf{nV})$  позволяет выразить коэффициент  $A$  через подвижность,  $A = -1/24\pi\eta\mu a$ . Затем приравнивание левой и правой частей в (3.5f) позволяет найти подвижность (3.5a). Выпишем здесь полученные поля скорости и давления:

$$\begin{aligned} v^i &= 6\pi\eta a \mathcal{G}^{ij}(\mathbf{r}) V^j - \frac{a^3}{4} \nabla_i (\mathbf{V}\nabla) \frac{1}{r} = \quad (3.5g) \\ &= V^i \left( \frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) + \frac{3n^i(\mathbf{nV})}{4} \left( \frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right), \end{aligned}$$

$$P = \frac{3\eta a}{2} \frac{(\mathbf{nV})}{r^2} = -\frac{3\eta a}{2} (\mathbf{V}\nabla) \frac{1}{r}, \quad (3.5h)$$

где функция Грина  $\mathcal{G}^{ij}(\mathbf{r})$  определена в (3.2g).

Вариация давления (3.5h), связанная с движением шарика, имеет противоположные знаки спереди и сзади шарика — спереди давление больше, чем сзади. Этот результат интуитивно верен, ведь шарик должен испытывать сопротивление среды. Поучительно сравнить с потенциальным обтеканием, для которого давление спереди и сзади одинаково, см. (11.1h).

Приближение Стокса годится только до определённого расстояния  $R_\eta$ . На расстояниях  $r \sim R_\eta$  нелинейное слагаемое  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ , как и слагаемое  $\partial_t \mathbf{v}$ , в уравнение Навье-Стокса становится сравнимым с вязким слагаемым:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim \nu \Delta \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad R_\eta \sim \frac{\nu}{V}. \quad (3.5i)$$

Тем не менее, в случае малого размера шарика, когда  $aV \ll \nu$ , существует промежуточная асимптотика  $a < r \ll R_\eta$ , для которой в главном приближении верно приближение Стокса.

**Решение в терминах функции тока** задачи Стокса об обтекании сферы дано в [Хашпель & Бреннер, 1976, §4.17].

### 3-2.1 Уточнение Осеена формулы Стокса

Как уже обсуждалось, на расстояниях больше  $R_\eta$  (3.5i) выражение для поля скорости (3.5g) перестаёт быть применимым. Возможно получить правильное выражение на таких расстояниях.

Для этого перейдём в систему отсчёта, в которой шарик покоится. В этой системе отсчёта поле скорости жидкости  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ . На расстояниях  $r \gtrsim R_\eta$  скорость,

индуцированная движением шарика, мала,  $v \ll V$ , так что нелинейный член в уравнении Навье-Стокса (2.8f) достаточно линеаризовать по  $\mathbf{v}$ . Используя то, что  $\mathbf{V}$  не зависит от координат, и мы ищем стационарное решение, приходим к уравнению

$$(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.6)$$

Удержание члена в левой части (3.6) на расстояниях  $r \ll R_\eta$ , где он относительно мал, не является незаконным, поскольку отбрасывание полного нелинейного члена в этой области пространства даёт ошибку того же порядка. Поэтому следует решать уравнение (3.6) во всём пространстве с граничными условиями (3.5f) на поверхности и  $\mathbf{v} \rightarrow 0$  на далёких расстояниях.

Уравнение (3.6) остаётся верным, если заменить  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$ . Взяв ротор от (3.6), получим

$$\frac{V}{\nu} \partial_z \hat{E}^2 \psi = \hat{E}^4 \psi. \quad (3.7a)$$

сравни с (3.3h), где дифференциальный оператор  $\hat{E}^2$ , напомним, определён в (3.3f). Граничными условиями являются

$$\psi|_{r=a} = \text{const}, \quad \partial_r \psi|_{r=a} = 0, \quad \psi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{r_\perp^2 V}{2}. \quad (3.7b)$$

### 3-2.2 Задачи

• **Задача 1:** Найдите скорость падения золотого шарика диаметром 1 мм в глицерине. Массовая плотность глицерина равна 1260 кг/м<sup>3</sup>, массовая плотность золота — 19 000 кг/м<sup>3</sup>, динамическая вязкость глицерина  $\eta = 1.5 \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

• **Задача 2:** Задача о тумане: почему мелкие капельки, составляющие облака, не падают вниз? Найдите скорость падения капли воды радиуса  $a = 1 \text{ мкм}$  в воздухе. Динамическая вязкость воздуха  $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Упрощённо считайте, что течение в капле воды не возбуждается.

#### Обтекание вязкой капли вязкой жидкостью.

Рассмотрим теперь вариант, когда вместо твёрдого шарика в жидкости движется капля другой жидкости под действием силы тяжести. Форма капли предполагается почти сферической в силу действия сил поверхностного натяжения. Решение дано в [Хашпель & Бреннер, 1976, §4.21] в терминах функции тока.

### §3-3. Аксиально симметричное течение

Рассмотрим аксиально-симметричные течения несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Эта модель подходит, например, для течений, порождённых движением тела вращения вдоль своей оси, или течений через аксиально-симметричное отверстие.

#### 3-3.1 Обтекание эллипсоида

Задача об обтекании эллипсоида вращения может быть решена в элементарных функциях путём введения сфероидальных координат, являющихся ортогональными криволинейными координатами, см. [Хашель & Бреннер, 1976, §§ 4.26, 4.27, 4.30].

В частности, для диска радиуса  $a$  подвижность  $\mu_{\text{диск}}$  (3.5а) при движении вдоль его оси равна

$$\frac{1}{\mu_{\text{диск}}} = 16\eta a, \quad (3.8)$$

то есть отношение подвижности диска и шарика того же радиуса  $\mu$  близко к единице,  $\mu_{\text{диск}}/\mu \approx 1.18$ .

• **Задача 1:** Сильно удлинённый эллипсоид вращения движется вдоль своей оси с маленькой скоростью, так что число Рейнольдса для течения вблизи него мало. Найти с логарифмической точностью подвижность для такого движения. Большая полуось эллипсоида равна  $b$ , остальные две меньшие —  $a$ ,  $a \ll b$ . *Указание:* считайте, что сила  $F$ , приводящая в движение эллипсоид, распределена с некоторой погонной плотностью вдоль него. Действие этой распределённой силы обеспечивает движение точек эллипсоида со скоростью  $V$  вдоль его оси. При этом всю длину эллипсоида следует разбить на области, размер которых равен размеру его поперечного сечения.

*Решение:* Направим ось эллипсоида вдоль оси  $Oz$ , его центр поместим в начало координат. Согласно общему выражению для функции Грина (3.2е),

$$\frac{1}{4\pi\eta} \int_{-b}^b dz' \frac{f(z')}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2(z)}} = V. \quad (3.9а)$$

Пусть в жидкости взвешены тела малого размера. Жидкость, в которой взвешены тела, мы будем также называть растворителем. Жидкость несжимаема, её течение подчиняется уравнению Навье-Стокса (2.12с); динамическую вязкость жидкости-растворителя будем обозначать  $\eta_0$ .

Каждое тело может находиться в различных состояниях, что включает в себя различные ориентации тела в пространстве и возможные различные конфигураци-

В (3.9а) мы регуляризовали интеграл на близких расстояниях, добавив под корень  $\rho^2$ , где  $\rho(z) = a\sqrt{1-z^2/b^2}$  — диаметр поперечного сечения эллипсоида. Теперь в интеграле (3.9а) выделим главную, логарифмически расходящуюся часть. Для этого представим интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b dz' \frac{f(z) + (f(z') - f(z))}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2(z)}} &\approx f(z) \int_{-b}^b \frac{dz'}{\sqrt{\dots}} \approx \\ &\approx f(z) \left( \ln \frac{b-z}{\rho(z)} + \ln \frac{b+z}{\rho(z)} \right) = 2f(z) \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Вклад, у которого интегранд пропорционален  $f(z') - f(z)$ , не даёт логарифмически большого фактора  $\ln(b/a) \gg 1$  и потому был опущен как относительно малый. В результате находим, что решением для (3.9а) является сила с постоянной погонной плотностью

$$f = \frac{2\pi\eta}{\ln(b/a)} V, \quad F = 2b \cdot f = \frac{4\pi\eta b}{\ln(b/a)} V. \quad (3.9б)$$

• **Задача 2:** Рассмотрим эллипсоид вращения, малая полуось которого равна  $a$ , а длинная  $b$ . Эллипсоид помещён во поток жидкости, такой, что в его отсутствии поле скорости (внешнее поле скорости) постоянен во времени и имеет линейный профиль в пространстве,

$$v^i = \zeta^{ik} r^k, \quad \|\zeta^{ik}\| = \lambda \cdot \text{diag}(-1/2, -1/2, 1), \quad (3.10а)$$

где  $\lambda > 0$  — ляпуновская экспонента потока, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор. Пусть центр эллипсоида находится в начале координат, а его главная ось сонаправлена с осью  $Oz$ . Тогда эллипсоид остаётся неподвижным. Найдите, как распределена сила натяжения (измеряемая в эрг/см) вдоль эллипсоида в переделе  $b \gg a$  с логарифмической точностью.

### §3-4. Суспензии

онные состояния тела. Состояние, в котором тело находится в данный момент времени, в общем случае определяется начальными условиями и внешним потоком скорости во все времена до момента наблюдения. Объём  $V_{\text{body}}$ , который тело вытесняет из жидкости, постоянен во времени, поэтому течение суспензии является несжимаемым.

Мы пренебрегаем силами, действующими внешними источниками на частицы. В частности, мы пренебрега-

ем силой выталкивания, возникающей из-за возможной разницы между плотностями жидкости и тел, т.е. считаем эффект сегрегации незначительным.

Характерными длинами в рассматриваемой задаче являются размер тела  $a$ , под которым мы будем понимать наибольший линейный размер тела, а также характерное расстояние между телами

$$l = 1/\sqrt[3]{c}, \quad (3.11a)$$

где  $c$  – концентрация взвешенных тел. Мы предполагаем, что длины  $a$  и  $l$  достаточно малы, так что числа Рейнольдса на таких расстояниях

$$\text{Re}_a = \frac{\rho a^2 |\nabla \mathbf{v}|}{\eta_0} \ll 1, \quad \text{Re}_l = \frac{\rho l^2 |\nabla \mathbf{v}|}{\eta_0} \ll 1. \quad (3.11b)$$

Поэтому на масштабах  $a$ ,  $l$  в уравнении (2.12c) можно пренебречь левой частью, перейдя к уравнению Стокса (3.2a).

Для того чтобы характеризовать динамический отклик суспензии, мысленно проведём два эксперимента – с чистой жидкостью и с суспензией. Все величины, относящиеся к эксперименту с чистой жидкостью, мы будем снабжать индексом (0), а величины, относящиеся к эксперименту с суспензией, будем оставлять без индекса. Оба эксперимента проводятся в одинаковых условиях. А именно, оба течения происходят в объёме  $\mathcal{V} \sim R^3$ , таком, что в нём находится большое количество частиц, т.е.  $R \gg l$ , а, с другой стороны, таком, что на расстояниях  $R$  число Рейнольдса остаётся много меньше единицы. На границе этого объёма  $\Gamma_{\mathcal{V}}$  установлены одинаковые условия, в частности, равны скорости чистой жидкости и суспензии,

$$v_{(0)}^i|_{\Gamma_{\mathcal{V}}} = v^i|_{\Gamma_{\mathcal{V}}}. \quad (3.11c)$$

Скорость течения  $\mathbf{v}_{(0)}$  в эксперименте с чистой жидкостью линейно зависит от значения скорости на границе сосуда вследствие малости роли нелинейного члена в уравнении Навье-Стокса. При течении суспензии скорость жидкости  $\mathbf{v}$  может зависеть нелинейным и нелокальным во времени образом от скорости на границе сосуда  $\mathbf{v}_{(0)}$ , вследствие того, что взвешенные частицы в общем случае являются деформируемыми, а для сферически несимметричных частиц их ориентация определяется предысторией потока.

Если течение неограничено, то скажем, что мы выделили в суспензии объём  $\mathcal{V}$  с указанными выше свойствами, форма которого по возможности приближена к правильной и выбрана так, что его граница  $\Gamma_{\mathcal{V}}$  проходит только внутри жидкости и не пересекает ни одного взвешенного тела.

Будем нумеровать частицы индексом  $\mu$ , а поверхность  $\mu$ -й частицы обозначим  $S_{\mu}$ . Полная поверхность  $\Gamma$ , ограничивающая жидкость-растворитель внутри объёма  $\mathcal{V}$ , равна

$$\Gamma = \Gamma_{\mathcal{V}} + \sum_{\mu} S_{\mu}. \quad (3.11d)$$

Объём, занимаемый частицей номер  $\mu$ , есть  $\mathcal{V}_{\mu}$ , а объём, занимаемый жидкостью-растворителем внутри объёма  $\mathcal{V}$  есть  $\mathcal{V}_{\text{slv}}$ , так что

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{slv}} + \sum_{\mu} \mathcal{V}_{\mu}. \quad (3.11e)$$

Отметим, что скорость  $\mathbf{v}$  и давление  $P$  хорошо определены только в жидкости, тогда как внутри взвешенных тел эти величины нам в общем случае не известны, или вообще могут не иметь смысла. Напротив, поток импульса  $\Pi^{ik}$  можно считать определённым во всём пространстве.

### 3-4.1 Тензор напряжений

Дадим определение средних величин в объёме суспензии через поверхностные интегралы. Средний градиент скорости

$$\bar{\zeta}^{ik} = -\frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}} dS^k v^i \stackrel{\text{pure}}{=} \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} d^3r \partial_k v_{(0)}^i. \quad (3.12a)$$

При  $R \gg l$  определение (3.12a) перестаёт зависеть от конкретной формы объёма  $\mathcal{V}$ . Второе равенство в (3.12b) написано для чистого растворителя в отсутствие взвешенных тел; оно показывает, что в этом случае средний градиент скорости  $\bar{\zeta}$ , вычисленный по (3.12a), и точное его значение  $\hat{\zeta}_{(0)}$  совпадают.

Хотя поток импульса определён во всём пространстве, его среднее по объёму также полезно переписать через поверхностный интеграл:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{ik} &= \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \Pi^{ik} dV = \\ &= -\frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}} dS^m r^k \Pi^{im} = -\frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}} dS r_k f_i, \end{aligned} \quad (3.12b)$$

где  $\mathbf{f}$  – поверхностная сила, приложенная к границе  $\Gamma_{\mathcal{V}}$  со стороны объёма  $V$ . При выводе (3.12b) мы воспользовались равенством

$$\partial_m r^k \Pi^{im} = \Pi^{ik},$$

верным при малых числах Рейнольдса.

Возможно поставить задачу об аналитической связи между  $\bar{\Pi}^{ik}$  и  $\bar{\zeta}^{ik}$ . Будем исходить из того, что мы знаем уравнение течения жидкости-растворителя и закон движения взвешенных частиц, находящихся в потоке, однако нам не известно их внутреннее строение. Поэтому проделаем с (3.12b) некоторые преобразования. Разобьём интеграл по объёму в (3.12b) на интеграл по объёму, занимаемому жидкостью-растворителем, и интеграл по объёмам взвешенных частиц. После этого к первому интегралу применим равенство, подобное использованному в (3.12a), а ко второму, равенство, подобное использованному в (3.12b). В результате получим

$$\bar{\Pi}^{ik} = \bar{\Pi}_{(0)}^{ik} + \sum_{\mu} \Pi_{\mu}^{ik} \quad (3.12c)$$

где

$$\bar{\Pi}_{(0)}^{ik} = -\eta_0 (\zeta^{ik} + \zeta^{ki}) + \frac{\delta^{ik}}{V} \int_{V_{\text{slv}}} d^3r P,$$

а, и

$$\Pi_{\mu}^{ik} = \frac{1}{V} \int_{S_{\mu}} [\eta_0 (dS^i v^k + dS^k v^i) + dS^m r^k \Pi^{im}]. \quad (3.12d)$$

Полезно сравнить (3.12c) с (3.13f), а также (3.12d) с (3.13g). Выражение для  $\Pi_{\mu}^{ik}$  в (3.12d) можно “получить” из выражения для  $W^{\mu}$  (3.13g), проварьировав его по  $\zeta_{(0)}^{ik}$  при постоянной скорости и давлении в суспензии  $\mathbf{v}$  и  $p$ , и поменяв после этого знак. При таком варьировании получится величина  $\Pi_{\mu}^{ik}$  с точностью до слагаемого, пропорционального единичной матрице.

Напомним, что величина (3.13g) не зависит от конкретного выбора формы поверхности, охватывающей  $\mu$ -ю частицу. Для величины  $\Pi_{\mu}^{ik}$  можно сформулировать аналогичное утверждение. Непосредственной проверкой можно получить, что если вместо поверхности  $S_{\mu}$  в (3.12d) взять поверхность  $S_{\text{empty}}$ , которая содержит внутри себя только чистую жидкость, то

$$\int_{S_{\text{empty}}} [(dS^i v^k + dS^k v^i) + dS^m r^k \Pi^{im}] = \delta^{ik} \int_{V_{\text{empty}}} dV p. \quad (3.12e)$$

Таким образом, величина  $\Pi_{\mu}^{ik}$  не зависит от выбора поверхности  $S_{\mu}$  с точностью до слагаемого, пропорционального единичной матрице.

В связи с этим отметим, что с помощью (3.12c) можно вычислять только девиатор потока момента импульса (его бесследовую часть), а его след определять через условие несжимаемости течения суспензии.

Среднее давление определяем аналогичным способом,

$$\bar{P} = -\frac{1}{3V} \int_{\Gamma_V} dS^k r^k p. \quad (3.12f)$$

### 3-4.2 Скорость диссипации энергии

Если известно, что тензор напряжений в суспензии пропорционален тензору градиента скорости, а течение несжимаемо, то связь между тензором напряжений и градиентом скорости задаётся единственным коэффициентом — динамической вязкостью суспензии  $\eta$ . Этот коэффициент можно найти из энергетического баланса. Действительно, для поддержания течения внешние источники должны подводить мощности  $W^{(0)}$  и  $W$  соответственно для двух экспериментов. По определению, мгновенная эффективная вязкость суспензии  $\eta$  даётся выражением

$$\eta = \eta_0 \frac{W}{W^{(0)}}, \quad (3.13a)$$

где  $\eta_0$  — вязкость чистой жидкости.

Выразим теперь затрачиваемые мощности через поле скоростей жидкости:

$$W = \int_{\Gamma_V} dS^k \Pi^{ki} v_{(0)}^i, \quad W^{(0)} = \int_{\Gamma_V} dS^k \Pi_{(0)}^{ki} v_{(0)}^i, \quad (3.13b)$$

где  $\Pi^{ki}$  есть поток импульса в жидкости-растворителе,

$$\Pi^{ki} = P \delta^{ik} - \eta_0 (\partial_i v^k + \partial_k v^i). \quad (3.13c)$$

Вектор  $dS^k$  направлен внутрь жидкости. При написании выражения для  $W$  в (3.13b) мы воспользовались условием (3.11c).

Следующим шагом свяжем мощность  $W$  со значением скоростей на поверхности взвешенных частиц.

Перепишем мощность  $W$  в виде

$$W = \int_{\Gamma} dS^k \Pi^{ki} v_{(0)}^i - \int_{\sum_{\mu} S_{\mu}} dS^k \Pi^{ki} v_{(0)}^i. \quad (3.13d)$$

К первому интегралу в (3.13d) можно применить теорему взаимности (3.2d), получив

$$\int_{\Gamma} dS^k \Pi_{(0)}^{ki} v^i = \int_{\Gamma_V} dS^k \Pi_{(0)}^{ki} v_{(0)}^i + \int_{\sum_{\mu} S_{\mu}} dS^k \Pi_{(0)}^{ki} v^i. \quad (3.13e)$$

Первое слагаемое в (3.13e) есть ничто иное, как мощность  $W^{(0)}$ , затрачиваемая внешними силами в эксперименте с чистой жидкостью (3.13b). Таким образом, окончательно для мощности  $W$  получаем выражение

$$W = W^{(0)} + \sum_{\mu} W^{\mu}, \quad (3.13f)$$

$$W^{\mu} = \int_{S_{\mu}} dS^k [\Pi_{(0)}^{ki} v^i - \Pi^{ki} v_{(0)}^i]. \quad (3.13g)$$

Величину  $W^{\mu}$  в (3.13g) можно назвать мощностью, выделяющейся в суспензии вследствие присутствия в ней  $\mu$ -й частицы. Отметим, что вследствие теоремы взаимности (3.2d) интегрирование в (3.13g) может производиться не обязательно по поверхности тела  $S_{\mu}$ . Поверхность  $S_{\mu}$  можно заменить на любую другую поверхность, содержащую в себе  $\mu$ -ю частицу, и не содержащую в себе других частиц.

### 3-4.3 Разбавленные суспензии

Предположим теперь, что концентрация тел  $c$  достаточно мала, так что мала объёмная доля  $\varphi$ , занимаемая телами. Более того, мы требуем, чтобы среднее расстояние между телами  $l$  (3.11a) было много больше размера тела  $a$ . Итак, мы работаем в предположениях

$$\varphi = c V_{\text{body}} \ll 1, \quad a \ll l. \quad (3.14a)$$

Предположение (3.14a) позволяет считать, что гидродинамическим взаимодействием взвешенных частиц в

главном приближении можно пренебречь. Это означает, что скорость  $v^i$  и поток импульса  $\Pi^{ik}$  вблизи каждой частицы можно представить в виде

$$v^i = v_{(0)}^i + v_{\text{body}}^i, \quad \Pi^{ik} = \Pi_{(0)}^{ik} + \Pi_{\text{body}}^{ik}, \quad (3.14b)$$

где возмущенные части  $\Pi_{\text{body}}^{ik}$  и  $v_{\text{body}}^i$  убывают при удалении от частицы.

Не ограничивая общности можно считать, что невозмущенная скорость и давление во всём пространстве равны

$$v_{(0)}^i = \zeta_{(0)}^{ij} r^j, \quad p_{(0)} = \text{const}. \quad (3.14c)$$

В таком случае диссипация энергии при проведении эксперимента с чистой жидкостью равна

$$W^{(0)} = \mathcal{V} \zeta_{(0)}^{ij} (\zeta_{(0)}^{ij} + \zeta_{(0)}^{ji}), \quad (3.14d)$$

где  $\mathcal{V}$  — объём всей системы, ограниченной поверхностью  $\Gamma_{\mathcal{V}}$ .

Используя (3.14b), выражение (3.13g) для диссипации  $W^{\text{body}}$  энергии на частице можно переписать в виде

$$W^{\mu} = p_{(0)} \int_{\text{Sphere}} d\omega r r^i v_{\text{body}}^i - \quad (3.14e)$$

$$- \zeta_{(0)}^{ik} \int_{\text{Sphere}} d\omega r \left[ \eta (r^k v_{\text{body}}^i + r^i v_{\text{body}}^k) + r^j \Pi_{\text{body}}^{jk} r^i \right].$$

Интегрирование в (3.14e) производится по сфере радиуса  $r$ , полностью включающей в себя рассматриваемую частицу, а  $d\omega$  есть элемент телесного угла. Первый интеграл в равенстве (3.14e) есть работа, совершаемая частицей при расширении против внешнего давления. Этот вклад отсутствует, поскольку, как мы считаем, тело сохраняет свой объём. Вследствие того, что

радиус сферы в (3.14e) может быть выбран произвольным, в  $\mathbf{v}_{\text{body}}$  надо удержать только вклад, убывающий как квадрат расстояния до тела.

Если тело сохраняет свой объём, выражение (3.14e) для скорости диссипации энергии на частице можно переписать в виде

$$W^{\mu} = -\frac{4\pi r^3}{3} \frac{5\eta_0}{2} \int \frac{3 n^i n^j \zeta_{(0)}^{ij} d\omega}{4\pi} \left[ \frac{4v_{\text{body}}^r}{r} + \partial_r v_{\text{body}}^r \right], \quad (3.14f)$$

более удобном для дальнейших вычислений. При выводе (3.14f) мы воспользовались тем, что скорость вне тела подчиняется уравнению Стокса. Интегрирование в (3.14f) производится также по сфере радиуса  $r$ ,  $n^i$  есть единичный вектор, нормальный к поверхности сферы.

### 3-4.3.1 Суспензия твёрдых шариков

Решим самую простую задачу, когда взвешенными телами являются одинаковые твёрдые шарики радиуса  $r_0$ . Тогда из граничных условий следует, что возмущенная часть скорости вблизи шарика задаётся функциями

$$X = Y = -h, \quad Z = 0,$$

$$h(\vartheta, \phi) = \zeta_{(0)}^{ij} n^i n^j.$$

Мощность (3.14f) диссипирующая во взвеси благодаря присутствию шарика, равна

$$W_{\text{shpere}}^{\mu} = \frac{4\pi r_0^3}{3} \cdot \frac{5\eta_0}{2} \cdot \zeta_{(0)}^{ij} (\zeta_{(0)}^{ij} + \zeta_{(0)}^{ji}). \quad (3.14g)$$

Таким образом, вязкость суспензии

$$\eta = \eta_0 \left( 1 + \frac{5\varphi}{2} \right). \quad (3.14h)$$

## §3-5. Вязкий пограничный слой

Литература: [Ландау & Лифшиц, 1986, § 24]

Течения, ограниченные твёрдыми границами и характеризующиеся большим числом Рейнольдса (или эквивалентным ему большим безразмерным параметром), имеют особую геометрическую структуру вблизи границ, отличающуюся от геометрической структуры вдали от стенок, или, как говорят, в объёме. Вблизи границы образуется вязкий пограничный слой, в котором касательные компоненты скорости пропорциональны расстоянию до границы, обращаясь в нуль на ней самой.

### 3-5.1 Течение в плоском канале, переменное во времени

Рассмотрим сперва следующую элементарную задачу. Пусть жидкость заключена в канале прямоугольного сечения  $R \times R_z$ ,  $R_z \gg R$ . Иными словами, течение происходит между двумя пластинами, находящимися на расстоянии  $R$  друг от друга. Длина канала равна  $L$ . К концам канала приложена переменная во времени разность давлений

$$P_+ - P_- = L \partial_x P, \quad \partial_x P = P' \sin(\omega t), \quad (3.15)$$

где  $\omega$  — частота колебаний давления,  $\partial_x P$  — однородный в пространстве градиент давления, а  $P'$  — его амплитуда колебаний во времени. Разность давлений (3.15) не

зависит от положения в поперечной плоскости канала. Считая, что число Рейнольдса для течения не слишком велико, так что в канале турбулентность не возникает, найдём распределение скорости вдали от  $z$ -боков пластин.

Введём декартову систему координат  $Oxyz$ , ось  $Ox$  которой направлена вдоль направления изменения давления, а ось  $Oy$  направлена поперёк пластин. Уравнение Стокса (3.1b) на единственную ненулевую компоненту скорости имеет вид

$$\partial_t v^x = \nu \partial_y^2 v^x - \frac{1}{\rho} \partial_x P \quad (3.16a)$$

причём  $0 < y < R$ , где  $R$  – зазор между пластинами. Отметим, что нелинейное слагаемое  $v^x \partial_x v^x$  обратилось в нуль, поскольку в этой простой геометрии скорость не изменяется вдоль линий тока. Жидкость вязкая, поэтому на границах мы налагаем условие без проскальзывания,

$$v^x = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, R. \quad (3.16b)$$

Поскольку задача линейна, перейдём к комплексным амплитудам. Периодическое поведение внешней силы приводит к появлению характерного масштаба  $\delta$ ,

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad (3.16c)$$

который мы будем называть толщиной вязкого пограничного слоя. В Фурье-представлении по времени уравнение Стокса (3.16a) переписывается в виде

$$\left( \frac{2i}{\delta^2} + \partial_y^2 \right) v^x = \frac{\partial_x P}{\rho} = \frac{iP' e^{-i\omega t}}{\rho}. \quad (3.16d)$$

Решением этого уравнения является

$$v^x = -\frac{i\partial_x P}{\rho\omega} \left( 1 - \frac{\cos(\sqrt{-2i}(y - R/2)/\delta)}{\cos(\sqrt{-i}R/(\sqrt{2}\delta))} \right). \quad (3.16e)$$

**Предел узкого вязкого пограничного слоя.** Если зазор между пластинами большой, так что  $\delta \ll R$ , тогда практически по всей ширине канала скорость равна

$$v_\infty = \frac{P'}{\rho\omega}, \quad (3.16f)$$

за исключением пристеночных слоёв толщины порядка  $\delta$ . В этих слоях профиль скорости имеет вид (выписываем для нижней стенки,  $y = 0$ )

$$v^x = \left( 1 - e^{-y/\delta} e^{iy/\delta} \right) e^{-i\omega t} v_\infty. \quad (3.16g)$$

Посчитаем поверхностную мощность  $Q$ , которая выделяется в вязком пограничном слое (угловые скобки означают усреднение по периоду колебаний). Согласно общему выражению (2.9c) для объёмной мощности выделения тепла за счёт действия вязких сил,

$$\begin{aligned} Q &= -\eta \int_0^\infty dy \langle v^x \partial_y^2 v^x \rangle = \eta \int_0^\infty dy \langle (\partial_y v^x)^2 \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} \frac{\rho v_\infty^2}{2} = \sqrt{\frac{\nu}{2\omega^3}} \frac{P'^2}{2\rho}, \end{aligned} \quad (3.16h)$$

где, ещё раз скажем,  $v_\infty$  – значение амплитуды колебаний скорости вне вязкого пограничного слоя, а  $P'$  – амплитуда колебаний производной давления вдоль границы.

### 3-5.2 Задачи

• **Задача 1:** Между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $b > a$  заключена жидкость, имеющая кинематическую вязкость  $\nu$ . Внешний цилиндр неподвижен, внутренний совершает малые колебания, двигаясь поступательно вдоль своей оси по гармоническому закону с частотой  $\omega$  (так что скорость на поверхности внутреннего цилиндра равна  $v^z = v_0 \cos(\omega t)$ ). Найти уравнение на распределение течения в цилиндрическом слое жидкости. Решить его для предельных случаев:

–  $\delta \ll (b - a)$  и  $a \sim b$ ;

–  $\delta \gg (b - a)$ .

Здесь  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  – толщина вязкого пограничного слоя. Течение считать несжимаемым и характеризующимся малым числом Рейнольдса.

• **Задача 2:** Между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $b > a$  заключена жидкость, имеющая кинематическую вязкость  $\nu$ . Внешний цилиндр неподвижен, внутренний совершает малые колебания, так что угол его поворота вокруг оси симметрии изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega$  (азимутальная скорость на поверхности внутреннего цилиндра равна  $v^\varphi = v_0 \cos(\omega t)$ ). Найти уравнение на распределение течения в цилиндрическом слое жидкости. Решить его для предельных случаев:

–  $\delta \ll a, (b - a)$ ;

–  $\delta \gg (b - a)$ .

Здесь  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  – толщина вязкого пограничного слоя. Течение считать несжимаемым и характеризующимся малым числом Рейнольдса.

• **Задача 3:** Между двумя концентрическими сферами с радиусами  $b > a$  заключена жидкость, имеющая кинематическую вязкость  $\nu$ . Внешняя сфера неподвижна, внутренняя совершает малые вращательные колебания, так что угол её поворота вокруг оси симметрии изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega$  (азимутальная скорость на экваторе внутренней сферы равна  $v^\varphi = v_0 \cos(\omega t)$ ). Найти уравнение на распределение течения в сферическом слое жидкости. Решить его для предельных случаев:

–  $\delta \ll a, (b - a)$ ;

–  $\delta \gg (b - a)$ .

Здесь  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  – толщина вязкого пограничного слоя. Течение считать несжимаемым и характеризующимся малым числом Рейнольдса.

Глава 4

# ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

## §4-1. Звуковые волны в однородной среде

Рассмотрим течение сжимаемой жидкости, описываемое уравнением Навье-Стокса (2.8e). Звуковые волны есть волны сжатия, в которых течение потенциально,

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \phi, \quad (4.1a)$$

поскольку оно направлено вдоль волнового вектора волны. Внешний потенциал, как мы предполагаем, отсутствует. Мы будем сперва считать, что течение является изэнтропийным, т.е. пренебрегать процессами диссипации. Для изэнтропийного сжимаемого течения справедливо уравнение Бернулли (2.21d):

$$\partial_t \phi = \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \mathcal{W} - \mathcal{W}_0. \quad (4.1b)$$

Здесь  $\mathcal{W}$  — удельная энтальпия, а величины с индексом '0' суть их значения в состоянии покоя. Отношение  $\mathcal{W}_0 = \rho_0^W / \rho_0$  является константой (напомним, что  $\rho_0$  и  $\rho_0^W$  суть массовая плотность и плотность энтальпии на единицу объёма в состоянии покоя жидкости), не зависящей от координат и времени, и может быть вычтено из  $\partial_t \phi$  без изменения реальной физической величины — скорости. Уравнение непрерывности на плотность (2.3) имеет вид

$$\partial_t \rho = \text{div}(\rho \text{grad } \phi). \quad (4.1c)$$

Прежде чем продвинуться в изучении звуковых волн, напомним необходимые нам в дальнейшем термодинамические соотношения. При постоянной удельной энтропии,  $\mathcal{S} = \text{const}$ , приращения интересных нам термодинамических потенциалов выражаются через приращение одного какого-либо и равны (смотри выкладки (2.7g))

$$\rho^E = \rho \mathcal{W} - P, \quad d\rho^E = \mathcal{W} d\rho, \quad d\mathcal{W} = \frac{dP}{\rho} = \frac{c_s^2}{\rho} d\rho. \quad (4.1d)$$

Величина  $c_s = c_s(\mathcal{S}, \rho)$ , как мы увидим ниже, имеет смысл *местной скорости звука (local speed of sound)*, а её значение при  $\rho = \rho_0$  называется просто *скоростью звука*. Локальные значения давления и удельной энтальпии получаются интегрированием этих соотноше-

ний:

$$P - P_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} d\tilde{\rho} c_s^2(\tilde{\rho}), \quad c_s^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\mathcal{S}}, \quad (4.1e)$$

$$\mathcal{W} - \mathcal{W}_0 = \int_{P_0}^P \frac{d\tilde{P}}{\rho(\tilde{P})} = \int_{\rho_0}^{\rho} d\tilde{\rho} \frac{c_s^2(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}. \quad (4.1f)$$

### 4-1.1 Гамильтоново описание звуковых волн

Построенная система является гамильтоновой, её гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int d^3r \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \frac{\rho(\nabla \phi)^2}{2} + \varepsilon(\varrho), \quad (4.2a)$$

$$\varepsilon(\varrho) = \rho^E - \mathcal{W}_0 \rho + P_0, \quad \rho = \rho_0 + \varrho.$$

Через  $\varrho$  мы обозначили отклонение плотности от равновесного значения. Канонически сопряжёнными переменными являются  $\phi, \varrho$ , так что скобка Пуассона

$$\{\phi(\mathbf{r}), \varrho(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.2b)$$

(Напомним, что размерность скобки Пуассона двух величин вовсе не должна совпадать с размерностью их произведения; в определении самой скобки может стоять домножение на произвольный множитель.) Прямым вычислением проверяется, что гамильтоновы уравнения

$$\partial_t \phi = \{\phi, \mathcal{H}\} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varrho}, \quad \partial_t \varrho = \{\varrho, \mathcal{H}\} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi} \quad (4.2c)$$

воспроизводят исходную систему уравнений (4.1b, 4.1c).

Второе слагаемое в выражении (4.2a) для плотности внутренней энергии звуковых волн  $\varepsilon(\varrho)$  учитывает тот факт, что при изменении плотности в элемент объёма приходит/уходит жидкость, а также что над элементом жидкости совершается работа внешним давлением. Поэтому объёмная плотность внутренней энергии звуковых волн  $\varepsilon(\varrho)$  имеет минимум при  $\varrho = 0$ , так что разложение плотности энергии по отклонению  $\varrho$  массовой плотности от её равновесного значения начинается с квадратичного члена:

$$\varepsilon(\varrho) = \frac{c_0^2}{2\rho_0} \varrho^2 + \frac{gc_0^2}{2\rho_0^2} \varrho^3 + \dots, \quad (4.2d)$$

где  $c_0 = c_s(\rho_0)$  — скорость звука при равновесном состоянии жидкости, а  $g$  — числовая константа, характеризующая уравнение состояния жидкости. Первая поправка к скорости звука по отклонению плотности может быть найдена из равенства

$$\frac{c_s^2}{\rho} = \frac{d^2\varepsilon}{d\rho^2} : \quad c_s \approx c_0 + \frac{3g+1}{2} \frac{\varrho}{\rho_0} c_0 + \dots \quad (4.2e)$$

Отметим также соотношение, которое понадобится нам при изучении распространения плоской простой звуковой волны:

$$3(g+1) = \frac{c_0^3}{v_0^3} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial P^2} \Big|_{P=P_0} \quad (\mathcal{V} \equiv 1/\rho). \quad (4.2f)$$

Помимо полной энергии (4.2a) сохраняется также и полный импульс волн. Говоря о полном импульсе системы волн, мы имеем ввиду волновой пакет, в котором амплитуда колебаний сходит на нет прежде, чем мы приблизимся к границе течения (если таковая имеется). Запишем уравнение Навье-Стокса в виде дивергенции потока импульса, см. (2.8d). Проинтегрировав его, мы придём к закону сохранения импульса:

$$\partial_t \mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{P} = - \int d^3r \rho \nabla \phi = - \int d^3r \varrho \nabla \phi. \quad (4.2g)$$

#### 4-1.1.1 Действие для звуковых волн

Как и со всяким нётеровским интегралом движения, сохранение энергии и импульса можно установить путём соответствующей вариации действия. Действие для системы волн есть

$$S = \int dt d^3r (\rho \partial_t \phi - \mathcal{H}). \quad (4.2h)$$

Покажем на примере звуковых волн, как получить законы сохранения энергии и импульса путём пустой вариации действия, т.е. такой вариации, которая заведомо не приводит к изменению действия (иными словами, получить их в качестве интегралов движения Э. Нётер). Выбираем вариацию системы координат

$$\begin{aligned} t &= t' + \tau(t, \mathbf{r}), & \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{u}(t, \mathbf{r}), \\ dt d^3r &= (1 + \partial_t \tau + \partial_i u^i) dt' d^3r' \\ \partial_t &= (1 - \partial_t \tau) \partial'_t - \partial_i u^i \partial'_i, \\ \partial_i &= (\delta^{ij} - \partial_i u^j) \partial'_j - \partial_i \tau \partial'_t \end{aligned} \quad (4.2i)$$

Эта вариация не приводит к изменения действия. Сперва посчитаем вариации полей на примере потенциала и

его производных:

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{r}) &= \phi(t', \mathbf{r}') + \delta\phi, & \delta\phi &= \tau \partial_t \phi + u^i \partial_i \phi. \\ \partial_t \phi &= \partial'_t \phi + \tau \partial_t^2 \phi + u^i \partial_{it} \phi = \\ &= \partial'_t \phi + \partial_t(\delta\phi) - (\partial_t \tau) \partial_t \phi - (\partial_t u^i) \partial_i \phi, \\ \partial_j \phi &= \partial'_j \phi + \partial_j(\delta\phi) - (\partial_j \tau) \partial_t \phi - (\partial_j u^i) \partial_i \phi. \end{aligned} \quad (4.2j)$$

Теперь считаем саму вариацию действия. При этом мы должны полагать, что поля удовлетворяют уравнениям движения (4.1b, 4.1c), так что вариации действия по  $\delta\phi$  и  $\delta\varrho$  равны нулю. Оставшаяся часть, которая также равна нулю, имеет следующий вид до проведения каких-либо интегрирований по частям

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt d^3r \left( \partial_j u^i \rho \partial_i \phi \partial_j \phi + \partial_j \tau \rho \partial_j \phi \partial_t \phi - \right. \\ &\quad \left. - \rho (\partial_t \tau \partial_t \phi + \partial_t u^i \partial_i \phi) + (\partial_t \tau + \partial_i u^i) (\rho \partial_t \phi - \mathcal{H}) \right). \end{aligned} \quad (4.2k)$$

Интегрирование по частям позволяет привести вариацию действия к виду

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt d^3r \left( \tau \left( \partial_t \mathcal{H} - \partial_j (\rho \partial_i \phi \partial_t \phi) \right) + \right. \\ &\quad \left. + u^i \left( \partial_t (\rho \partial_i \phi) + \partial_j (\delta^{ij} (\mathcal{H} - \rho \partial_t \phi) - \rho \partial_i \phi \partial_j \phi) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.2l)$$

Поскольку  $\delta S = 0$ , а вариации  $\tau$  и  $u^i$  могут быть любыми, скобки при них в правой части (4.2l) должны быть равны нулю. Равенство нулю скобки при  $\tau$  приводит (посредством динамического уравнения (4.1b) подставляем  $\partial_t \phi$ ) к уравнению сохранения полной энергии:

$$\partial_t \mathcal{H} + \text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 \right) \right) = 0. \quad (4.2m)$$

Поскольку плотность гамильтониана  $\mathcal{H}$  связана с плотностью внутренней энергии  $\rho^E$  согласно (4.2a), то уравнение (4.2m) с учётом уравнения непрерывности эквивалентно уравнению (2.7i, 2.7j) для потока полной энергии  $\rho^{E+\kappa}$  в идеальной жидкости.

Теперь приравняем нулю коэффициент при  $u^i$ . Во втором слагаемом снова подставим  $\partial_t \phi$  и распишем гамильтониан  $\mathcal{H}$  согласно (4.2a). Получим закон сохранения импульса:

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \partial_j (\rho v^i v^j + P \delta^{ij}) = 0. \quad (4.2n)$$

## §4-2. Линейное приближение для звуковых волн

В этом пункте мы для краткости опускаем индекс ‘0’ у величин, соответствующих равновесному состоянию там, где очевидна логика его присутствия. Переменные части ряда величин мы снабжаем штрихом — например,  $P'$ .

Для того, чтобы описать распространение волн в линейном приближении, надо удерживать только квадратичные члены в гамильтониане:

$$\mathcal{H}_2 = \int d^3r \left( \frac{\rho_0 (\nabla \phi)^2}{2} + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \varrho^2 \right). \quad (4.3a)$$

Динамические уравнения на поля (4.2c) принимают линейный вид,

$$\rho_0 \partial_t \phi = P', \quad (4.3b)$$

$$P' \equiv P - P_0 = c_0^2 \varrho = \rho^w - \rho_0^w,$$

$$\partial_t \varrho = \frac{1}{c_0^2} \partial_t P' = \operatorname{div}(\rho_0 \nabla \phi), \quad (4.3c)$$

где переменная часть давления написана в линейном приближении согласно (4.1f, 4.1e). Минус введение гамильтониана, первое уравнение может быть получено линеаризацией уравнения Бернулли (4.1b) с учётом (4.1d), второе уравнение — линеаризацией уравнения непрерывности (4.1c). Уравнения (4.3c) первого порядка по времени могут быть переписаны в виде волнового уравнения

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \Delta) \phi = 0. \quad (4.3d)$$

В дальнейшем в этом Пункте 4-2 опускаем индекс ‘0’.

**Закон дисперсии.** Пусть  $\omega, \mathbf{k}$  — частота и волновой вектор волн. В частности, поля  $\phi$  и  $\varrho$  имеют Фурье-образы

$$\begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{k}}(t) \\ \varrho_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \begin{pmatrix} \phi(t, \mathbf{r}) \\ \varrho(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (4.3e)$$

Уравнения (4.3c), записанные в Фурье-пространстве, дают закон дисперсии

$$\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|. \quad (4.3f)$$

Такой закон дисперсии называется линейным, поскольку он задаёт линейную связь между частотой и волновым числом (амплитудой волнового вектора). Абсолютная величина групповой скорости волн  $\mathbf{v}_g$  для линейного закона дисперсии не зависит от волнового вектора и совпадает с фазовой скоростью  $c$ ,

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = c\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (4.3g)$$

Единичный вектор  $\mathbf{n}$  имеет смысл направления распространения волны.

**Канонические координаты.** По аналогии с квантовыми полями (здесь, в классическом случае, постоянная Планка условно равна единице), введём поля  $a(t, \mathbf{r})$ ,  $a^*(t, \mathbf{r})$ , пропорциональные полям уничтожения и рождения кванта волнового движения в квантовом формализме:

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\rho_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^*), \quad \varrho_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\rho_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2c}} \frac{a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^*}{i}. \quad (4.3h)$$

В терминах этих полей гамильтониан записывается в виде

$$\mathcal{H}_2 = \int (d^3k) \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}. \quad (4.3i)$$

Полный импульс системы волн (4.2g) равен

$$\mathbf{P} = \int (d^3k) \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}. \quad (4.3j)$$

Выражение (4.3j) точное, при его получении мы опустили под интегралом вклады, нечётные по волновому вектору  $\mathbf{k}$ .

### 4-2.1 Локальные средние в волновых пакетах

Рассмотрим волновой пакет. В волновом пакете все волновые вектора имеют значения вблизи некоторого несущего  $\mathbf{k}$ , величина разброса  $\Delta k$  мала,  $\Delta k \ll |\mathbf{k}|$ . Например, комплексная амплитуда потенциала поля скорости

$$\phi = \phi_0(t, \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) \quad (4.3k)$$

Здесь огибающая  $\phi_0(t, \mathbf{r})$  меняется на расстояниях  $\sim 1/\Delta k$  и временах  $\sim 1/(c \cdot \Delta k)$ . Предполагается, что волновой пакет локализован далеко от границ течения: в нём амплитуда колебаний сходит на нет прежде, чем мы к ним приблизимся.

Будем интересоваться плотностями энергии и импульса и их потоков. Эти величины квадратичны по амплитуде волны и их надо понимать в смысле средних по быстрым осцилляциям волны. Вычисляя средние, мы предполагаем, что они получены усреднением по временам, большим по сравнению с периодом колебаний, но малым по сравнению с временем прохода волнового пакета  $1/(c \cdot \Delta k)$ .

Согласно (4.3c, 4.3b), в линейном приближении комплексные амплитуды полей связаны соотношениями

$$\phi = \frac{i}{\rho\omega} P', \quad \varrho = P'/c^2, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{c\rho} P' \mathbf{n}. \quad (4.3l)$$

Все прочие величины мы выразили через давление, поскольку амплитуду звука принято мерить именно в терминах давления. При нормальных условиях амплитуда  $\sqrt{\langle P^2 \rangle} = 20 \text{ мПа}$  для звука, распространяющегося в воздухе, соответствует уровню обычного разговора

(60 Дб), амплитуда  $\sqrt{\langle P'^2 \rangle} = 20$  мкПа (0 Дб) является порогом слышимости обычного человеческого уха.

Средние величины от осциллирующих величин типа (4.3l) оказываются равными нулю в первом порядке по амплитуде волны. Однако, они могут оказаться неравными нулю во втором порядке по амплитуде волны. Для определения квадратичных поправок надо обратиться к исходным нелинейным уравнениям движения (4.1c, 4.1b). Усредним по времени уравнение Бернулли (4.1b), разложив отклонение удельной энтальпии от среднего по степеням отклонения давления  $P'$  согласно (4.1f):

$$\mathcal{W} - \mathcal{W}_0 \approx \int_{P_0}^P \frac{d\tilde{P}}{\rho_0 + (P - P_0)/c_s^2} \approx \frac{P'}{\rho} - \frac{P'^2}{2c^2\rho^2}, \quad (4.3m)$$

так что

$$0 = \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + \frac{\langle P' \rangle}{\rho} - \frac{\langle P'^2 \rangle}{2c^2\rho^2}. \quad (4.3n)$$

(Здесь отметим, что усреднённая полная производная по времени  $\partial_t \phi$  содержит малость  $\Delta k/|\mathbf{k}|$  и потому принята равной нулю.) Отсюда и из линейных соотношений (4.3l) следует, что средняя вариация давления во втором порядке по амплитуде равна нулю,

$$\langle P' \rangle = 0. \quad (4.3o)$$

#### 4-2.1.1 Энергия и импульс, связанные с волной

Поскольку волны в линейном приближении являются гамильтоновой системой с гамильтонианом (4.3a), то в рамках этой системы сохраняется как энергия, так и импульс. Посчитаем плотности энергии, импульса и их потоков, связанные с волной.

Плотность импульса  $\vec{p}_s$ , которая совпадает с плотностью потока вещества, равна

$$\vec{p}_s = \rho \mathbf{v} + \varrho \mathbf{v}. \quad (4.3p)$$

В этой величине есть вклады первого и второго порядка по амплитуде волны. Среднее по периоду колебаний волны значения потоков квадратичны по амплитуде есть

$$\langle \vec{p}_s \rangle = \frac{1}{c^3\rho} \langle P'^2 \rangle \mathbf{n}, \quad (4.3q)$$

Закон непрерывности, усреднённый по периоду колебаний, имеет вид

$$\partial_t \langle \varrho \rangle = -\operatorname{div} \langle \vec{p}_s \rangle. \quad (4.3r)$$

Отклонение плотности энергии (2.7i) от равновесного значения есть

$$\rho_s^{E+\kappa} = \mathcal{W}_0 \varrho + \frac{\rho v^2 + c^2 \varrho^2 / \rho}{2}. \quad (4.3s)$$

Поток энергии (2.7j)

$$\mathbf{j}_s^{E+\kappa} = \mathcal{W}_0 \vec{p}_s + P' \mathbf{v}. \quad (4.3t)$$

Подстановка исходных уравнений течения (4.3b, 4.3c) даёт закон сохранения энергии внутри системы волны,

$$\partial_t \rho_s^{E+\kappa} + \operatorname{div} \mathbf{j}_s^{E+\kappa} = 0. \quad (4.3u)$$

Первое слагаемое в выражении для потока энергии (4.3t) есть константа  $\mathcal{W}_0$  помноженная на поток массы  $\vec{p}_s$  (4.3p). После усреднения по волновым осцилляциям сохранение этой части энергии, таким образом, определяется законом непрерывности для массы (4.3r). Вообще, средний, относительно медленный поток массы может быть связан не только с самой волной, но в любом случае должно выполняться уравнение непрерывности. Поэтому ниже мы в выражениях для энергии (4.3s) и её потока (4.3t) мы оставляем только вторые слагаемые, непосредственно связанные с волновыми осцилляциями. Для волнового пакета подстановкой соотношений (4.3l) получаем, что усреднённые по периоду колебаний величины равны

$$\langle \rho_s^{E+\kappa} \rangle = \frac{1}{c^2\rho} \langle P'^2 \rangle, \quad \langle \mathbf{j}_s^{E+\kappa} \rangle = c \rho_s^{E+\kappa} \mathbf{n}. \quad (4.3v)$$

Таким образом, энергия волны течёт со скоростью звука в направлении распространения звуковой волны.

Вернёмся теперь к закону сохранения импульса. Плотность потока импульса равна

$$\Pi_s^{ik} = P' \delta^{ik} + \rho v^i v^k. \quad (4.3w)$$

Согласно уравнениям течения (4.3b, 4.3c) условие сохранения импульса есть

$$\partial_t \Pi_s^i + \partial_k \Pi_s^{ik} = 0. \quad (4.3x)$$

Среднее по периоду колебаний волны значения потоков квадратичны по амплитуде волны,

$$\langle \Pi_s^{ik} \rangle = c \langle p_s^i \rangle n^k. \quad (4.3y)$$

Импульс также переносится со скоростью звука в направлении распространения звуковой волны.

## 4-2.2 Задачи

• **Задача 1:** Определить скорость дрейфа лагранжевой траектории в поле плоской монохроматической звуковой волны. Амплитуда колебаний давления в волне равна  $P'$ , скорость звука равна  $c$ , плотность среды в состоянии покоя —  $\rho$ .

• **Задача 2:** Определить линейный отклик сжимаемого газа на внешний источник, представляющий собой малую аддитивную добавку  $f(t, \mathbf{r})$  в давление  $P'$ , см. (4.3b).

*Решение:* Уравнения (4.3b, 4.3c) принимают вид

$$\begin{pmatrix} \partial_t & -c^2 \\ -\Delta & \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \varrho/\rho_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c^2/\rho_0)f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В Фурье-представлении  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ ,  $\Delta \rightarrow -k^2$ . При обращении матрицы возникает полюс, обход которого следует выбрать так, чтобы было выполнено условие причинности. Для этого следует добавить к частоте бесконечно малую отрицательную мнимую поправку, сделав формальную замену  $\omega \rightarrow \omega + i0$ :

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \varrho/\rho_0 \end{pmatrix} = \frac{(c^2/\rho_0)f}{(\omega + i0)^2 - c^2k^2} \begin{pmatrix} i\omega \\ k^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4a)$$

• **Задача 3:** Описать отклик сжимаемого газа на источник  $(\rho_0/c^2)f$  (аддитивная добавка к локальному давлению) размера  $a$ , равномерно движущийся вдоль оси  $Oz$  со скоростью  $V > 0$ :

$$f = \exp\left(-\frac{z'^2 + r_\perp^2}{2a^2}\right), \quad z' = z - Vt, \quad r_\perp^2 = x^2 + y^2.$$

Рассмотреть случаи дозвукового движения,  $V < c$ , и сверхзвукового движения,  $V > c$ , где  $c$  — скорость звука линейных волн.

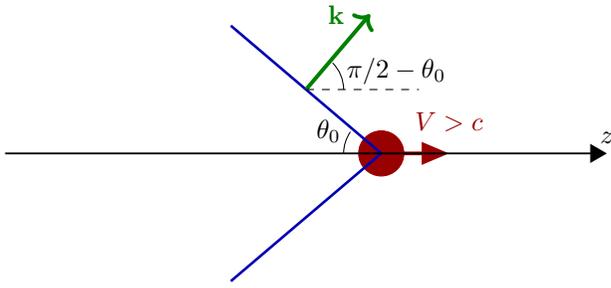


Рис. 4.1 След от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью.

*Решение:* Сначала дадим качественное описание системы волн, возбуждаемых равномерно движущимся источником. Волны будут излучаться только при сверхзвуковом движении. Пусть излучаемая волна имеет волновое число по оси  $Oz$  равное  $k_z$  и частоту  $\omega$ . Согласно эффекту Доплера,

$$\omega = k_z V. \quad (4.4b)$$

Действительно, в системе отсчёта, связанной с движущимся источником, волновое поле должно быть стационарным. С другой стороны, по закону дисперсии  $\omega = ck$ , поэтому

$$\frac{k_z}{k} = \frac{c}{V}. \quad (4.4c)$$

Отметим, что безразмерная скорость движения тела  $V/c$  называется *числом Маха* (*Mach number*). Волновой фронт направлен ортогонально волновому вектору, поэтому угол  $\theta_0$ , под которым от тела будут расходиться волны на конусообразной поверхности, см. Рисунок 4.1, определяется равенством

$$\sin \theta_0 = c/V, \quad 0 < \theta_0 < \pi/2. \quad (4.4d)$$

Угол  $\theta_0$  называется *углом Маха* (*Mach angle*). В силу линейности закона дисперсии звуковых волн, этот угол не зависит от длины волны. Вершина конуса совпадает с положением тела, а фронты волны расположены параллельно поверхности конуса. Отметим самосогласованность картины: фронт движется со скоростью звука  $c$ , при этом вершина конуса должна двигаться как раз со скоростью  $v$ , если угол раствора конуса  $\theta_0$  равен (4.4d). Наконец, конусообразная волна является расходящейся, по мере распространения площадь участка фронта растёт линейно со временем. Форма расходящейся волны называется *конусом Маха*. Из закона сохранения энергии следует, что амплитуда волны на фронте падает обратно пропорционально корню расстояния  $r_\perp$  до линии траектории источника,

$$\frac{\varrho}{\rho_0} \propto \frac{1}{\sqrt{r_\perp}} \quad \text{at the wave front} \quad z' = -r_\perp \operatorname{ctg} \theta_0. \quad (4.4e)$$

Если скорость движения дозвуковая, то тело (источник) не будет излучать звуковые волны (в приближении, что обтекание тела является потенциальным). Действительно, в этом случае невозможно удовлетворить рассуждениям, приведённым выше для сверхзвукового движения.

Теперь получим выше описанную картину на языке формул. Источник  $f$  в Фурье-представлении имеет вид

$$f = (2\pi)^{5/2} a^3 \delta(\omega - k_z V) \exp\left(-\frac{k^2 a^2}{2}\right). \quad (4.4f)$$

В этом выражении  $\delta$ -функция выражает собой эффект Доплера (7.11c). Вариация плотности согласно (4.4a) равна (измеряем расстояние в  $a$ )

$$\frac{\varrho}{\rho_0} = \int \frac{k^2 \exp(-k^2/2 + i\mathbf{k}\mathbf{r} - iVtk_z) d^3k}{\sqrt{2\pi}((Vk_z + i0)^2 - c^2k^2)}$$

Полюса в этом выражении соответствуют закону дисперсии (4.4d).

### §4-3. Линейное затухание звука

Звуковые волны затухают вследствие процессов диссипации, выражающихся в конечной вязкости и теплопроводности вещества. Рассмотрим затухание волн, распространяющихся в линейном режиме.

Из уравнения Навье-Стокса (2.8f) следует, что потенциальность течения не нарушается вязкими силами. Поэтому мы по-прежнему будем описывать звуковые волны в терминах потенциала течения (4.1a). Уравнение непрерывности (4.3c) остаётся тем же,

$$\partial_t \varrho = \rho \Delta \phi. \quad (4.5a)$$

Связь между давлением  $P'$  и плотностью  $\varrho$  должна быть уточнена по сравнению с (4.3b), поскольку теперь следует учесть процессы, связанные с диссипативным потоком тепла. Необходимо учесть динамику ещё одного поля — температуры или удельной энтропии — чтобы учесть поток тепла. Выберем энтропию, поскольку она есть мера отклонения от идеальности. Если  $S'$  есть изменение энтропии по сравнению с исходным равновесным состоянием, то

$$P' = c^2 \varrho - \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S S', \quad (4.5b)$$

где  $P'$ , напомним, есть отклонение давления от его равновесного значения. Уравнение на потенциал, следующее из уравнения Навье-Стокса (2.8f), линеаризованное по амплитуде волны, есть

$$\rho \partial_t \phi = P' + \zeta' \Delta \phi = c^2 \varrho - \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S S' + \zeta' \Delta \phi. \quad (4.5c)$$

Мы ввели обозначение  $\zeta'$  для комбинации первой и второй вязкостей,

$$\zeta' = \zeta + \frac{4\eta}{3}. \quad (4.5d)$$

Осталось написать уравнение на отклонение энтропии от среднего. Для этого нам понадобится ещё отклонение температуры, которое согласно (2.10j) есть

$$T' = \frac{T}{C_V} S' - \left. \frac{T}{\rho^2 C_V} \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V \varrho. \quad (4.5e)$$

Уравнение на удельную энтропию (2.10f), линеаризованное по амплитуде волны, имеет вид

$$\partial_t S' = \frac{\varkappa \Delta T'}{\rho T} = \frac{\varkappa}{\rho C_V} \Delta S' - \left. \frac{\varkappa}{\rho^3 C_V} \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V \Delta \varrho. \quad (4.5f)$$

Уравнения (4.5a, 4.5c, 4.5f) составляют полную систему уравнений. Рассмотрим плоскую волну (4.3e), в которой теперь частота и/или волновой вектор имеют мнимые добавки. В (4.5c) последние два слагаемых являются малыми (по малым вязкости и теплопроводности) поправками, поэтому в главном приближении мы имеем

по-прежнему бездиссипативный закон дисперсии (4.3f). В (4.5f) первое слагаемое в правой части мало по сравнению с левой частью, поскольку термодиффузия успевает оказать слабое влияние за период колебаний (иначе волна была бы быстро затухающей):

$$\omega_k = ck \gg \frac{\varkappa}{\rho C_V} k^2. \quad (4.5g)$$

Это условие нарушается только для очень коротких длин волн; мы предполагаем его выполненным. Теперь продифференцируем (4.5c) и подставим (4.5a), а также в качестве  $\partial_t S'$  возьмём второе слагаемое в (4.5f):

$$\rho \partial_t^2 \phi = -c^2 \rho \Delta \phi - \left. \frac{\varkappa}{\rho^3 C_V} \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V \Delta \varrho + \zeta' \Delta \partial_t \phi.$$

Во втором слагаемом, являющемся малой диссипационной поправкой, выразим вариацию плотности в пренебрежении диссипационными поправками,  $\varrho = (\rho/c^2) \partial_t \phi$  (4.5c), и проделаем следующие выкладки, основанные на термодинамических соотношениях:

$$\begin{aligned} - \left. \frac{\varkappa}{\rho^3 C_V} \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V \Delta \varrho &= \frac{\varkappa}{C_V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V \Delta \partial_t \phi = \\ &= \frac{\varkappa}{C_V} \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_S \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V \Delta \partial_t \phi = \frac{T \varkappa}{C_V C_P} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V \Delta \partial_t \phi = \\ &= \frac{C_P - C_V}{C_P C_V} \varkappa \Delta \partial_t \phi, \end{aligned}$$

поскольку

$$\left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_S = \frac{T}{C_P} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V = \frac{C_P - C_V}{T}. \quad (4.5h)$$

В результате приходим к замкнутому уравнению на потенциал течения:

$$\partial_t^2 \phi = c^2 \Delta \phi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{C_P - C_V}{C_P C_V} \varkappa + \zeta' \right) \Delta \partial_t \phi. \quad (4.5i)$$

Соответствующее дисперсионное соотношение

$$\mathbf{k} = \left( \frac{\omega}{c} + \frac{i\mu\omega^2}{c^3} \right) \mathbf{n}, \quad \mu = \frac{1}{2\rho} \left( \frac{C_P - C_V}{C_P C_V} \varkappa + \zeta' \right). \quad (4.5j)$$

Коэффициент  $\mu$  имеет размерность коэффициента диффузии. Здесь мы рассматриваем звуковые волны высокой добротности, для них  $\mu k^2 \ll \omega$ ; для этого действительно необходимо выполнения неравенства (4.5g). Предположим, что мы имеем дело с плоской волной, распространяющейся вдоль оси  $Ox$ . Тогда уравнение (4.5i) может быть записано в виде (мы прибавили члены, которые относительно малы как  $(\mu k^2/\omega)^2$ , и потому находятся за гранью точности наших аналитических вычислений)

$$\left( \partial_t + c \partial_x - i\mu \partial_x^2 \right) \left( \partial_t - c \partial_x - i\mu \partial_x^2 \right) \phi = 0. \quad (4.5k)$$

Таким образом, уравнение может быть разделено для волн, бегущих в одну и другую сторону. Волны, бегущие направо, описываются уравнением

$$(\partial_t + c\partial_x - \mu\partial_x^2)v = 0 \quad (4.51)$$

### 4-3.1 Задачи

• **Задача 1:** Найдите длину распространения плоской звуковой волны в линейном режиме в воздухе с частотой 100 Гц. Среду считать неограниченной. При нормальных условиях коэффициент теплопроводности воздуха  $\kappa = 0.0257 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$ , плотность  $\rho = 1.2 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,

динамическая сдвиговая вязкость воздуха равна  $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$  (считать, что это есть коэффициент  $\zeta'$  (4.5d)), теплоёмкость  $C_p = 10^3 \text{ Дж}/\text{кг} \cdot \text{град}$ , показатель адиабаты  $C_p/C_v = 1.43$ , скорость звука  $c = 330 \text{ м}/\text{с}$ .

• **Задача 2:** Найдите длину распространения звуковой волны (длина, на которой интенсивность звука падает в  $e$  раз), имеющей частоту 100 Гц, в трубке фонендоскопа. Внутренний диаметр трубки равен  $d = 3 \text{ мм}$ , плотность воздуха равна  $\rho = 1.2 \text{ кг}/\text{м}^3$ , сдвиговая динамическая вязкость воздуха равна  $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ , скорость звука  $c = 330 \text{ м}/\text{с}$ . *Указание:* для определения затухания необходимо учитывать вклад в диссипацию со стороны вязкого приграничного слоя.

## §4-4. Геометрическая акустика

Рассмотрим распространение звука в слабо неоднородной среде. ‘Слабо’ означает, что свойства среды меняются мало на длине волны звука  $\lambda$  (существенно изменяется на расстояниях  $\sim L \gg \lambda$ ). Более того, они меняются плавно, не испытывая скачков. Этот случай является противоположным задаче об отражении и преломлении звуковой волны на границе раздела. По мере распространения волнового пакета он перемещается в области с изменёнными свойствами среды. Однако с точки зрения волнового пакета, эти свойства изменяются адиабатически, в результате чего отражением волны от неоднородностей можно пренебречь. Здесь мы рассматриваем неподвижную среду, так что её свойства остаются неизменными во времени.

Заметим, что, если среда неоднородна (т.е., например, она уже не изэнтропическая, поскольку температура неоднородна в пространстве), то, согласно уравнению на завихренность (2.6d), в общем случае течение перестаёт быть потенциальным. Однако амплитуда завихренности будет мала по параметру  $\lambda/L$ , поскольку в жидкости нет поперечных колебаний с частотой, близкой к звуковой на данной длине волны.

Поэтому мы полагаем, рассматривая распространение собственно звуковой волны, что течение потенциально. В условиях неоднородности в линеаризованных уравнениях Бернулли (4.3b) и непрерывности (4.3c) величины с индексом ‘0’ зависят от координат. Зависит от координат также и скорость звука  $c_s$ . Таким образом, волновое уравнение имеет вид

$$\partial_t^2 \phi = c_s^2 \frac{1}{\rho_0} \text{div} (\rho_0 \text{grad} \phi). \quad (4.6a)$$

Мы предполагаем, что локально поле  $\phi$  представляет собой плоскую волну. Направление распространения и амплитуда этой волны меняются на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны, и на временах, больших по сравнению с периодом колебаний. В соответствии с этим предположением, представим комплексную

амплитуду волны в виде

$$\phi = \text{Re} (a e^{i\psi}), \quad (4.6b)$$

где  $a$  и  $\psi$  — действительные функции времени и координат. Фаза  $\psi$  называется *эйконалом* (*eikonal*). В пределе, когда применимо приближение геометрической акустики (или оптики в электродинамике), эта величина изменяется намного быстрее, чем абсолютное значение амплитуды  $a$ . Мысленно зафиксируем  $a$  и сравним (4.6b) с выражением для фазы в волновом пакете (4.3k). Справедливо определить локальное значение частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$  как

$$\omega(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k}(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad d\psi = -\omega dt + (\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}). \quad (4.6c)$$

В соответствии с нашим предположением, амплитуда, частота и волновой вектор меняются медленно во времени и пространстве, т.е. слабо за время одного периода колебаний  $2\pi/\omega$  и на расстоянии одной длины волны  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ . Поскольку порядок дифференцирования не важен, верно тождество

$$\partial_t \mathbf{k} = -\text{grad} \omega. \quad (4.6d)$$

Волновое уравнение (4.6a), в терминах комплексной амплитуды имеющее вид (здесь и ниже в аналогичных местах взятие логарифма от размерной величины не является проблемой, поскольку такой логарифм подвергается дифференцированию)

$$e^{-i\psi} (\partial_t^2 - c_s^2 \Delta - c_s^2 (\text{grad} \ln \rho_0 \cdot \nabla)) (a e^{i\psi}) = 0, \quad (4.6e)$$

будучи разделённым на действительную и мнимую части, распадается на два действительных уравнения.

В Пункте 4-2.1 мы все величины выражали через вариацию давления  $P'$ , поэтому здесь запишем  $P'$  в терминах параметризации (4.6b):

$$P' = \text{Im} (\rho_0 \omega a e^{i\psi}). \quad (4.6f)$$

**Уравнение эйконала.** Действительная часть уравнения (4.6e) задаёт закон дисперсии и геометрию пространства лучей. Для того, чтобы показать это, перепишем действительную часть (4.6e) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - c_s^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 &= \\ &= \frac{\left(\partial_t^2 - c_s^2(\Delta + (\text{grad} \ln \rho_0 \cdot \nabla))\right)a}{a} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.6g)$$

В соответствии с нашим приближением, правую часть этого уравнения можно положить равной нулю, поскольку она мала по сравнению с квадратом первых производных фазы. Таким образом, в приближении геометрической оптики уравнение (4.6g)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - c_s^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = c_s^2 \mathbf{k}^2. \quad (4.6h)$$

Записанное в первом виде, это уравнение называют *уравнением эйконала*, во втором виде — дисперсионным соотношением. Согласно дисперсионному соотношению, амплитуда волнового вектора определяется скоростью звука,

$$\text{grad } \psi = \mathbf{k} = \frac{\omega}{c_s} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (4.6i)$$

В случае линейного закона дисперсии групповая скорость сонаправлена волновому вектору, см. (4.3g), то есть единичный вектор  $\mathbf{n}$  есть локальное направление распространения волнового пакета, или, как говорят — *луча*.

#### 4-4.1 Энергия и импульс волны

Поскольку среда всюду покоится, то волна не может совершать работу над жидкостью, передавая ей часть своей энергии. Иными словами, инвариантность по времени для уравнений распространения волны приводит к сохранению её энергии. С импульсом волны не так — в неоднородной среде волна обменивается с ней импульсом, поскольку та отклоняет волну. (Конечно, в таком случае волна должна сначала сообщить среднее течение жидкости, что в свою очередь нарушит сохранение энергии в волновом движении. Но мы здесь пренебрегаем этим эффектом.)

**Поток энергии.** Уравнение сохранения энергии следует из мнимой части волнового уравнения (4.6e). Непосредственное выделение мнимой части из (4.6e) приводит к

$$-2\omega\partial_t a - \partial_t \omega a - 2c_s^2 k^i \partial_i a - c_s^2 a \partial_i \left(\frac{\omega \rho_0}{c_s} \mathbf{n}^i\right) = 0. \quad (4.6j)$$

Уравнение сохранения энергии звуковой волны (смотри выражения для плотности энергии и её потока (4.3v) и

линейные соотношения (4.3l); для снижения громоздкости записи мы не ставим знаки усреднения по периоду колебаний, которое подразумевается)

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_s^{K+E} + \text{div } \mathbf{j}_s^{K+E} &= 0, \\ \rho_s^{K+E} &= \frac{\omega^2 \rho_0 a^2}{2c_s^2}, \quad \mathbf{j}_s^{K+E} = c_s \rho_s^{K+E} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.6k)$$

получается из (4.6j) добавлением в левую часть

$$0 = a(\partial_t \omega + c_s \mathbf{n}^i \partial_i \omega) \quad (4.6l)$$

и домножением результата на  $-\omega a/2c_s^2$ . В свою очередь, уравнение (4.6l) может быть получено из (4.6h) дифференцированием его по времени, затем использованием тождества (4.6d) и домножением на  $a/2\omega$ . Равенство (4.6l), кстати, означает, что частота волны переносится с групповой скоростью вдоль луча.

**Волновое давление.** Величина

$$f_s^i = -\partial_t p_s^i - \partial_k \Pi_s^{ik} \quad (4.6m)$$

есть сила, действующая со стороны волны на среду; выражения для плотности импульса волны и его потока приведены в (4.3q, 4.3y). Используя (4.6k, 4.6l) получаем, что искомая плотность силы

$$\mathbf{f}_s = \rho_s^{E+K} \text{grad} \ln c_s. \quad (4.6n)$$

Направление силы соответствует тому, что звуковые лучи отклоняются в сторону области с меньшим значением скорости звука, см. также ниже уравнение (4.6p) для траектории лучей.

#### 4-4.2 Монохроматическая волна

Предположим, что характеристики волны (амплитуда  $a$ , частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$ ) не зависят явно от времени. Такую волну следует назвать монохроматической: во всём пространстве её комплексная амплитуда зависит от времени как  $\exp(-i\omega t)$  с одной и той же частотой  $\omega$ . Действительно, поскольку

$$0 = \partial_t \mathbf{k} = -\text{grad } \omega \quad (4.6o)$$

в силу (4.6g), то это означает, что частота  $\omega$  постоянна не только во времени, но и в пространстве.

Найдём уравнение, определяющее траекторию лучей. Возьмём градиент от уравнения Эйконала (4.6h) и воспользуемся уравнением (4.6i):

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial_k (c_s^2 \partial_i \psi \partial_i \psi)}{2\omega^2} = c_s \mathbf{n}^i \partial_i (\mathbf{n}^k / c_s) + \partial_k \ln c_s = \\ &= (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}^k + (\partial_k - \mathbf{n}^k \mathbf{n}^i \partial_i) \ln c_s = 0. \end{aligned}$$

Перепишем получившееся уравнение в виде равенства для производной направления вдоль луча:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}^k = -(\delta^{ki} - \mathbf{n}^k \mathbf{n}^i) \partial_i \ln c_s. \quad (4.6p)$$

Итак, по мере распространения луча направление его распространения  $\mathbf{n}$  отклоняется в сторону области с меньшим значением скорости звука.

#### 4-4.2.1 Принцип наименьшего действия

Уравнение (4.6р) может быть получено как результат минимизации акустической длины

$$A = \int \frac{dl}{c_s}, \quad (4.6q)$$

где  $dl = \sqrt{dx^i dx^i}$  — приращение длины вдоль траектории распространения звукового луча, так что единичный вектор  $\mathbf{n}^i = dx^i/dl$ . Проверим это непосредственно. Вариация акустической длины при вариации пути  $x^i \rightarrow x^i + \delta x^i$  есть

$$\begin{aligned} \delta A &= \int \left( \frac{\mathbf{n}^i}{c_s} d\delta x^i - \frac{\partial_i c_s}{c_s^2} dl \delta x^i \right) = \\ &= - \int \left( (\mathbf{n}^j \partial_j) \mathbf{n}^i + (\delta^{ij} - \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j) \partial_j \ln c_s \right) \frac{\delta x^i}{c_s} dl. \end{aligned} \quad (4.6r)$$

## §4-5. Распространение звука в движущейся среде

Рассмотрим распространение звука на фоне течения. Мы будем предполагать, что само это течение  $\mathbf{V}$  не связано со звуковыми волнами, то есть не приводит к изменению плотности жидкости,

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (4.8a)$$

Это течение медленное в том смысле, что и его градиент  $\partial_i V^j$  и характерная частота его изменения  $1/T$  малы по сравнению с характерной частотой  $\omega$  звуковой волны,

$$\varepsilon_t = \max \left( \frac{1}{\omega} \frac{|\partial_t \mathbf{V}|}{V}, \frac{|\partial_i V^j|}{\omega} \right) \ll 1. \quad (4.8b)$$

Свойства среды — её массовая плотность и скорость звука — предполагаются однородными в пространстве.

Полная скорость жидкости  $\mathbf{v}$  может быть представлена как сумма крупномасштабного течения  $\mathbf{V}$  и волнового движения  $\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}. \quad (4.8c)$$

Эти вклады разделены в частотном представлении: скорость изменения течения  $\mathbf{V}$  намного меньше частоты звука  $\omega$ . В линейном приближении по амплитуде волны поле скорости  $\mathbf{V}$ , взятое отдельно, удовлетворяет уравнению Навье-Стокса. Пока мы будем рассматривать распространение звука в линейном приближении, хорошо определено соответствующее разделение давления

$$P = P_0 + P_V + P', \quad (4.8d)$$

Условие равенства нулю вариации приводит к уравнению (4.6р).

### 4-4.3 Задачи

• **Задача 1:** Плоская монохроматическая звуковая волна распространяется вдоль оси  $Ox$ , в области  $x > 0$  скорость звука  $c_s(x)$  плавно возрастает в сторону увеличения координаты  $x$ . Итоговое её изменение велико,  $c_s(x \rightarrow +\infty) \gg c_{s,0} \equiv c_s(x = 0)$ . Плотность энергии, связанная со звуковой волной на входе (т.е. при  $x = 0$ ) равна  $\rho_{s,0}^{E+K}$ . Определите интегральное по  $x$ -координате давление  $\pi_{xx}$ , которое производит волна на среду.

• **Задача 2:** Получите аналог (4.6р) для случая, когда частота  $\omega$  нестационарна. *Ответ:*

$$(\partial_t + c_s(\mathbf{n} \cdot \nabla)) \mathbf{n}^k = -(\delta^{ki} - \mathbf{n}^k \mathbf{n}^i) \partial_i c_s, \quad (4.7a)$$

что означает, что вектор  $\mathbf{n}$ , переносясь с групповой скоростью  $c_0 \mathbf{n}$  параллельно самому себе, и изменяя своё направление вследствие неоднородности среды.

где  $P_0(\mathbf{r})$  — распределение давления в отсутствии какого-либо течения. Линеаризованное по амплитуде волны уравнение на  $\mathbf{u}$  имеет вид

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{V} = -(c^2/\rho_0) \operatorname{grad} \varrho, \quad (4.8e)$$

где, как и прежде,  $\varrho$  есть отклонение плотности от её значения  $\rho_0$  в состоянии покоя жидкости.

Волновое движение в главном приближении является потенциальным течением, так что вихревая высокочастотная поправка  $\mathbf{u}_\varpi$  мала по малому параметру (4.8b):

$$\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \phi + \mathbf{u}_\varpi, \quad (4.8f)$$

$$|\mathbf{u}_\varpi| \ll |\mathbf{u}|, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_\varpi = 0, \quad \varpi_u = \operatorname{rot} \mathbf{u}_\varpi.$$

Выполнить явно декомпозицию (4.8f) при произвольном пространственном масштабе медленного течения  $\mathbf{V}$  оказывается в техническом смысле достаточно сложно.

### 4-5.1 Приближение геометрической акустики

Предположим, как это было сделано и в § 4-4, что характерный масштаб  $L$  течения  $\mathbf{V}$  намного превышает длину волны звука  $\lambda$ ,

$$\varepsilon_r = \frac{\lambda}{L} \ll 1. \quad (4.9a)$$

Тогда возможно в приближённом виде выполнить декомпозицию (4.8f) высокочастотного течения. Положим, сперва по определению, что уравнение на потенциал  $\phi$  имеет вид

$$(\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))\phi = c^2 \varrho / \rho_0, \quad (4.9b)$$

сравни с (4.3b); здесь и далее  $c$  — скорость звука в невозмущённой жидкости. Выбор такого вида уравнения на потенциал оправдывается тем, что тогда вихревая часть  $\mathbf{u}_\omega$  оказывается отличной от нуля только если у крупномасштабного течения есть ненулевая завихренность  $\boldsymbol{\omega}_V = \text{rot } \mathbf{V}$ :

$$(\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))\mathbf{u}_\omega + (\mathbf{u}_\omega \nabla)\mathbf{V} = [\boldsymbol{\omega}_V \times \text{grad } \phi]. \quad (4.9c)$$

В этом уравнении, во-первых, последнее слагаемое в левой части относительно мало по малому параметру (4.8b); мы им потому пренебрегаем. Правая часть (4.9c) является источником для  $\mathbf{u}_\omega$ , колеблющемся с частотой  $\omega$ . Уравнение (4.9c) может быть проинтегрировано вдоль лагранжевой траектории, задаваемой медленным течением  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{u}_\omega(t, \mathbf{r}) = \int^t dt' [\boldsymbol{\omega}_V \times \text{grad } \phi]. \quad (4.9d)$$

В подинтегральном выражении  $\text{grad } \phi$  осциллирует с частотой  $\omega$ , а множитель  $\boldsymbol{\omega}_V$  изменяется медленно, поэтому приближённо имеем

$$\mathbf{u}_\omega(t, \mathbf{r}) = [\mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega}_V], \quad s^i = - \int^t dt' \partial_i \phi, \quad (4.9e)$$

где  $\mathbf{s}$  следует назвать вектором смещения частицы в звуковой волне. Из равенства (4.9e) следует, что отношение  $|\mathbf{u}_\omega|/|\mathbf{u}| \sim \varepsilon_t$  мало по малому параметру (4.8b). Дивергенция  $\text{div } \mathbf{u}_\omega$ , хотя и не равна нулю (тогда как, напомним, декомпозиция (4.8f) это предполагает), однако в пределе геометрической акустики (4.9a) приобретает дополнительную малость по параметру  $\varepsilon_r$  (4.9a). Действительно, поскольку  $\text{rot } \mathbf{s} = 0$ , то

$$\text{div } \mathbf{u}_\omega = (\mathbf{s} \cdot \Delta \mathbf{V}) \sim \varepsilon_t \varepsilon_r \cdot \text{div } \mathbf{u}, \quad (4.9f)$$

что пренебрежимо мало по сравнению с  $\text{div } \mathbf{u}$ .

Теперь выпишем уравнение на вариацию плотности:

$$(\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))\varrho = \rho_0 \Delta \phi - \rho_0 \text{div } \mathbf{u}_\omega, \quad (4.9g)$$

сравни с (4.3c). Последнее слагаемое в правой части (4.9g) мало, поскольку мала дивергенция (4.9f), поэтому этим слагаемым следует пренебречь. Из уравнений (4.8e) можно получить волновое уравнение на потенциал течения:

$$(\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))^2 \phi = c^2 \Delta \phi. \quad (4.9h)$$

#### 4-5.1.1 Лагранжиан

Волновое уравнение (4.9h) может быть получено как условие равенства нулю вариации действия

$$S = \int dt d^3r \mathcal{L} \quad (4.9i)$$

по  $\phi$  с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \left( (\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))\phi \right)^2 - (\hat{\omega}_\mathbf{k} \phi)^2 \right), \quad (4.9j)$$

где  $\omega_\mathbf{k}$  есть закон дисперсии,  $\hat{\omega}_\mathbf{k}$  (здесь мы расширяем рассмотрение для произвольного типа волн) есть некоторый интегро-дифференциальный оператор. Для звуковых волн  $\omega_\mathbf{k} = ck$ . В свою очередь, действие (4.9i) может быть получено из действия  $S$  (4.2h), если в нём удержать только квадратичные члены по переменным  $\phi$ ,  $\varrho$ , и подставить уравнение движения (уравнение Бернулли) (4.1b).

#### 4-5.2 Распространение звуковых лучей

Предположим, что медленное течение постоянно во времени,  $\partial_t \mathbf{V} = 0$ . Рассмотрим распространение звуковых лучей, что естественно делать в приближении эйконала. Полагаем, что поля  $\phi$ ,  $\varrho$  зависят от времени и координат как

$$\phi = a e^{i\psi}, \quad \varrho = a_\varrho e^{i\psi}, \quad (4.10a)$$

где амплитуды  $a$ ,  $a_\varrho$  и фаза  $\psi$  являются действительными функциями координат. Обозначим локальные значения частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$  согласно (4.6c).

Действительная часть коэффициента при фазовом множителе  $\exp(i\psi)$  в волновом уравнении (4.9h) в пренебрежении малыми поправками относительного порядка  $\varepsilon_r^2 = \lambda^2/L^2$  (4.9a) приводит к дисперсионному соотношению

$$(\omega - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}))^2 = \omega_\mathbf{k}^2, \quad (4.10b)$$

сравни с законом дисперсии для неподвижной среды (4.6h). Левая часть (4.10b) выражает собой эффект Доплера: собственная частота волны (частота колебаний в системе отсчёта, связанной с движущимся элементом жидкости)  $\tilde{\omega} = \omega - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})$ . Правую часть (4.10b) мы записали в общем виде с законом дисперсии  $\omega_\mathbf{k}$ , претендуя здесь на общность выводов настоящего рассмотрения. Предполагая, что  $\tilde{\omega} > 0$ , получаем обобщение дисперсионного соотношения (4.6i):

$$\tilde{\omega} = \omega_\mathbf{k}, \quad \text{sound: } \mathbf{k} = \frac{\tilde{\omega}}{c} \mathbf{n}. \quad (4.10c)$$

#### 4-5.2.1 Траектории распространения звуковых лучей

Собственную частоту  $\tilde{\omega}$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  как функции времени и координат возможно получить дифференцированием дисперсионного соотношения (4.10b).

Производная (4.10b) по времени даёт уравнение на перенос частоты:

$$\partial_t \omega + ((\mathbf{V} + \mathbf{v}_{g\mathbf{k}})\nabla)\omega = 0, \quad \mathbf{v}_{g\mathbf{k}} = \text{grad}_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}},$$

$$\text{sound : } \partial_t \omega + ((\mathbf{V} + \mathbf{c}\mathbf{n})\nabla)\omega = 0, \quad \mathbf{v}_{g\mathbf{k}} = \mathbf{c}\mathbf{n}, \quad (4.10d)$$

сравни с (4.6l). Из уравнения (4.10d) следует, что, если глобальная частота  $\omega$  фиксирована во времени, то она однородна вдоль траекторий распространения лучей. Здесь и ниже скорость  $\mathbf{V} + \mathbf{c}\mathbf{n}$  потока характеристики волны (в данном случае частоты в лабораторной системе координат  $\omega$ ) определяется суммой групповой скорости волн  $\mathbf{c}\mathbf{n}$  и скорости переноса течением  $\mathbf{V}$ . Если предполагать, что речь идёт о распространении волнового пакета, то его положение  $\mathbf{R}(t)$  изменяется согласно уравнению

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{g\mathbf{k}}. \quad (4.10e)$$

Теперь произведём дифференцирование (4.10b) по координатам:

$$\left(\partial_t + ((\mathbf{V} + \mathbf{v}_{g\mathbf{k}})\nabla)\right)k^i = -(\partial_i V^l)k^l. \quad (4.10f)$$

Таким образом, волновой вектор изменяется в процессе движения волнового пакета, скорость его изменения определяется матрицей градиента  $\partial_i V^l$  поля скорости медленного течения. В уравнении (4.10f) слева стоит полная производная волнового вектора по времени, справа — результат действия на него матрицы градиента скорости. Обратим внимание, что такому уравнению подчиняется волновой вектор любого мелкомасштабного поля, переносимого крупномасштабным течением среды.

Уравнения (4.10e, 4.10f) определяют в том числе и траекторию движения волнового пакета. Для её определения нет необходимости знать абсолютное значение волнового вектора (собственную частоту), а нужно лишь знать направление распространения  $\mathbf{n}$ . Уравнение на  $\mathbf{n}$  может быть получено из (4.10f) как его следствие:

$$\left(\partial_t + ((\mathbf{V} + \mathbf{v}_{g\mathbf{k}})\nabla)\right)\mathbf{n}^i = -(\delta^{ik} - \mathbf{n}^i \mathbf{n}^k)(\partial_k V^l)\mathbf{n}^l, \quad (4.10g)$$

сравни с (4.7a).

#### 4-5.2.2 Волновое действие

Теперь выделим мнимую часть коэффициента при фазовом множителе  $\exp(i\psi)$  в волновом уравнении (4.9h). Формально, нам надо выделить вклады, линейные по производным медленно меняющихся полей. Для этого в правой части (4.9h) надо разложим фазу вблизи текущей точки по малому отклонению от неё (обозначим эту точку нижним индексом '0'),

$$\psi = \psi_0 + k_0^i r^i + \frac{1}{2}(\partial_j k^i)_0 r^i r^j + \dots \quad (4.10h)$$

а также разложим стоящий перед  $\phi$  оператор по малому градиенту  $\nabla \ll \mathbf{k}$

$$-\hat{\omega}_{\mathbf{k}_0 - i\nabla}^2 \approx -\omega_{\mathbf{k}_0}^2 + 2i\omega_{\mathbf{k}_0} v_{g0}^i \partial_i + \frac{\partial(\omega_{\mathbf{k}_0} v_{g0}^i)}{\partial k^j} \partial_j \partial_i + \dots \quad (4.10i)$$

Теперь мы можем выписать мнимые части в левой и правой частям волнового уравнения (4.9h) с нужной нам точностью (теперь, проведя промежуточные вычисления, убираем нижний индекс '0' в правой части):

$$e^{-i\psi} \cdot \text{l.h.s.} \rightarrow -2i\tilde{\omega}(\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))a - ia(\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))\tilde{\omega},$$

$$-e^{-i\psi}\hat{\omega}_{\mathbf{k}}^2(ae^{i\psi}) \rightarrow 2i\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}_{g\mathbf{k}}\nabla)a + ia \text{div}(\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{g\mathbf{k}}), \quad (4.10j)$$

сравни с (4.6j). В результате, мнимая часть домноженного на  $e^{-i\psi}$  уравнения (4.9h) может быть приведена к виду закона сохранения,

$$\partial_t \mathcal{I} + \text{div}((\mathbf{V} + \mathbf{v}_{g\mathbf{k}})\mathcal{I}) = 0, \quad \mathcal{I} = \tilde{\omega}a^2, \quad (4.10k)$$

где сохраняющейся величиной является *волновое действие*,

$$\int d^3r \mathcal{I} = \text{const}. \quad (4.10l)$$

Для звуковых волн объёмная плотность волнового действия

$$\mathcal{I} = \frac{\rho_0 \tilde{\omega} a^2}{c^2} = \frac{2\rho_s^{K+E}}{\tilde{\omega}}, \quad (4.10m)$$

где плотность энергии волны  $\rho_s^{K+E}$  дана в (4.6k). Напомним, что в теории колебательных систем (аналитическая механика) отношение энергии колебаний к частоте является адиабатическим инвариантом в случае, когда параметры колебательной системы изменяются медленно по сравнению со скоростью колебаний.

**Нётеровский интеграл движения.** Поскольку для постоянного течения  $\mathbf{V}$  лагранжиан (4.9j) оказывается не зависящим явно от времени, то сохраняется нётеровский интеграл движения

$$\int \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \phi)} \partial_t \phi - \mathcal{L} \right) d^3r = \text{const}. \quad (4.10n)$$

Используя волновое уравнение (4.9h)

$$(\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))^2 \phi = -\hat{\omega}_{\mathbf{k}}^2 \phi, \quad (4.10o)$$

сохраняющуюся величину (4.10n) можно привести к виду

$$\int d^3r (\partial_t \phi) (\partial_t + (\mathbf{V}\nabla))\phi = \text{const}. \quad (4.10p)$$

Для волнового пакета в приближении эйконала сохраняющаяся величина, будучи усреднённой по временным осцилляциям, согласно закону дисперсии (4.10b, 4.10c) оказывается равной

$$\int \omega \tilde{\omega} a^2 d^3r = \text{const}, \quad (4.10q)$$

т.е. пропорциональной волновому действию (4.10l, 4.10m), поскольку частота  $\omega$  в лабораторной системе координат остаётся неизменной для волнового пакета, см. уравнение (4.10d).

В окончании проделанного исследования отметим, что в Пунктах 4-5.2, 4-5.2.2 мы учитывали поправки, относительно малые как  $\varepsilon_t$  (4.8b) или  $\varepsilon_r$  (4.9a). Этим оправдывается пренебрежение поправкой (4.9f), которая существенно меньше, поскольку мала как  $\varepsilon_t \cdot \varepsilon_r$ .

### 4-5.3 Задачи

Определим траектории звуковых лучей в однородном сдвиговом течении, когда в некоторых декартовых координатах  $Oxyz$  скорость течения направлена вдоль  $x$ -оси и равна  $V^x = \Sigma y$ . Будем считать, что звуковая волна возбуждается монохроматическим (частота  $\omega$ ) локализованным в пространстве источником, находящимся в начале координат. Сперва мы отдельно рассмотрим более простой случай, когда по  $z$ -координате движение отсутствует,  $k^z = 0$ . Для определённости будем полагать, что  $\Sigma > 0$ .

Уравнение (4.10b) даёт связь между собственной частотой  $\tilde{\omega}$ , положением волнового пакета  $\mathbf{R}$  и направлением его распространения  $\mathbf{n}$  относительно движущейся жидкости:

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}/c)}. \quad (4.11a)$$

Для того, чтобы найти направление волнового вектора  $\mathbf{n}$ , технически проще всего решить уравнение (4.10f) на сам волновой вектор  $\mathbf{k}$ , воспринимая время как параметр:

$$\frac{dk^y}{dt} = -\Sigma k^x \quad k^{x,z} = \text{const}. \quad (4.11b)$$

Получаем решение

$$\mathbf{k}(t) = \{k^x, k_0^y - \Sigma k^x t, k^z\}. \quad (4.11c)$$

Согласно этому решению, если луч распространяется вправо,  $k^x > 0$ , то на больших временах он будет распространяться вниз. Если же, наоборот, луч распространяется влево,  $k^x < 0$ , то с течением времени он всё более будет отклоняться вверх. Далее, в принципе, из (4.11c) можно найти единичный вектор  $\mathbf{n}$ , после чего проинтегрировать уравнение (4.10e) на траекторию луча.

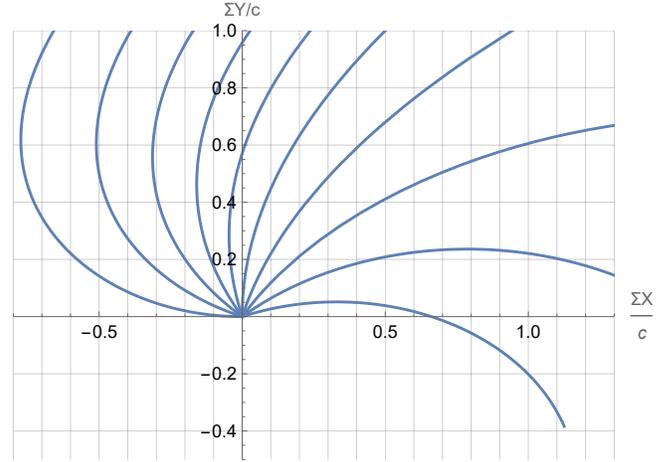


Рис. 4.2 Распространение звука на фоне сдвигового течения  $V^x = \Sigma y$  с  $\Sigma > 0$ . Линиями показаны траектории звуковых лучей. Картина для лучей, уходящих вниз, получается симметричным отражением от начала координат.

Комбинирование компонент уравнений (4.10e, 4.10g) позволяет получить следующие уравнения

$$\frac{d(\Sigma X/c)}{dn^x} = \frac{\Sigma Y/c + n^x}{(n^x)^2 n^y}, \quad \frac{dn^x}{d(\Sigma Y/c)} = (n^x)^2. \quad (4.11d)$$

Более подробно рассмотрим случай, когда луч распространяется в плоскости  $Oxy$ , так что всегда  $n^z = 0$ . Параметризуем единичный вектор через угол  $\varphi$ ,  $\mathbf{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi, 0\}$ . Решение (4.11c) для волнового вектора даёт зависимость от времени единичного вектора  $\mathbf{n}$ , решение второго уравнения в (4.11d) даёт связь между  $Y$  и  $\varphi$ :

$$\text{tg } \varphi_0 - \text{tg } \varphi = \Sigma t, \quad \frac{1}{\cos \varphi_0} - \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\Sigma Y}{c}, \quad (4.11e)$$

где угол  $\varphi_0$  задаёт угол выхода луча из источника. Теперь в первом уравнении (4.11d) мы можем выразить  $Y$  через  $\varphi$ ,

$$d\left(\frac{\Sigma X}{c}\right) = \left(\frac{1}{\cos^3 \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi_0 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi}\right) d\varphi, \quad (4.11f)$$

до зависимости  $X(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma X}{c} = & \frac{1}{2} \ln \frac{\text{ctg}((\varphi + \pi/2)/2)}{\text{ctg}((\varphi_0 + \pi/2)/2)} + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{\sin \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{2 \sin \varphi}{\cos \varphi \cos \varphi_0} \right). \end{aligned} \quad (4.11g)$$

Отдельно можно выделить луч, выходящий поперёк линиями тока, т.е. характеризующийся  $\varphi_0 = \pm \pi/2$ . Траектория такого луча определяется соотношением

$$\frac{\Sigma X}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Sigma Y}{c} \right)^2. \quad (4.11h)$$

На Рисунке 4.2 изображён ход звуковых лучей, исходно распространяющихся вверх (для исходно распространяющихся вниз лучей картинка симметрична). Если источник находится на поверхности, то звуковые лучи выходят только вверх. Тогда слева от источника расположена “глухая” зона, куда звуковые волны вообще не доходят. В частности, существует максимальное рассто-

яние, на которое лучи могут уйти от источника влево.

• **Задача 1:** Определите начальную форму траекторий звуковых лучей, распространяющихся в течении, направленном вдоль оси  $Ox$  и имеющем вертикальный сдвиг силы  $\Sigma$ , испущенных источником под малым углом к горизонтальной поверхности.

## §4-6. Акустические течения

Волна распространяется вдоль поверхности. Введём декартову систему координат с осью  $x$ , направленной вдоль распространения волны, и осью  $y$ , направленной нормально к твёрдой границе. Давление  $P = P_0 + \rho_0 p$ , плотность  $\rho = \rho_0(1 + \varrho)$ , в линейном приближении  $p = c^2 \varrho$ . В линейном же приближении поле скорости плоской звуковой волны, невозмущённое наличием границы, удовлетворяет уравнению

$$\partial_t u = -\partial_x p_u, \quad p_u = c^2 \varrho_u, \quad \partial_t \varrho_u = -\partial_x u. \quad (4.12a)$$

Мы полагаем волну плоской монохроматической, так что  $\partial_x = ik$ ,  $\partial_t = -i\omega$ , где  $\omega = ck$ . Тогда давление и потенциал скорости  $\phi_u$  (скорость  $u = -\partial_x \phi_u$ ) равны

$$p_u = cu, \quad \phi_u = iu/k \quad (4.12b)$$

Полная скорость  $v$  с учётом возмущения, вносимого стенками, равна

$$v^x = u + u_b^x, \quad v^y = u_b^y. \quad (4.12c)$$

Граничными условиями на границе являются условия прилипания и непротекания,

$$v^x|_{y=0} = 0, \quad v^y|_{z=0} = 0. \quad (4.12d)$$

Напишем в линейном приближении уравнения на компоненты скорости и вариацию давления:

$$\begin{aligned} \partial_t u_b^x &= -\partial_x p_b + \nu \Delta u_b^x, \\ \partial_t u_b^y &= -\partial_y p_b + \nu \Delta u_b^y, \\ \partial_t p_b &= -c^2 (\partial_x u_b^x + \partial_y u_b^y), \end{aligned} \quad (4.12e)$$

где полные вариации давления и плотности суть  $p = p_u + p_b$  и  $\varrho = \varrho_u + \varrho_b$ . Мы пренебрегаем поправками, относительно малыми как  $\gamma^2 \equiv (k\delta)^2/2 = \nu k^2/\omega \ll 1$ , где  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  — толщина вязкого подслоя (3.16c). Это означает, что нам следует заменить лапласиан на вторую производную по нормали,  $\Delta \rightarrow \partial_y^2$ . Далее, поскольку волна монохроматическая и плоская, то система уравнений (4.12e) упрощается до вида

$$\begin{aligned} -i\omega u_b^x &= -ikp_b + \nu \partial_y^2 u_b^x, \\ -i\omega u_b^y &= -\partial_y p_b + \nu \partial_y^2 u_b^y, \\ -i\omega p_b &= -c^2 (iku_b^x - c^2 \partial_y u_b^y), \end{aligned} \quad (4.12f)$$

На твёрдой границе должны выполняться условия

$$u_b^x|_{y=0} = -u, \quad u_b^y|_{y=0} = 0. \quad (4.12g)$$

Граничными условия на бесконечности, казалось бы, должно быть убывание амплитуды скорости  $u_b$ . Однако, как мы увидим в процессе решения, амплитуда индуцированного стенкой осциллирующего во времени течения содержит как вихревую бездивергентную часть, действительно убывающую до нуля вне вязкого подслоя, так и звуковую волну относительно слабой амплитуды, поле скорости в которой линейно растёт с удалением от стенки.

Будем измерять время в  $1/\omega$ , расстояние — в  $1/k$ . Тогда, исключая давление из (4.12f), получаем

$$\begin{aligned} p_b &= u_b^x - i\partial_y u_b^y, \\ 0 &= -\partial_y u_b^y + \gamma^2 \partial_y^2 u_b^x, \\ -iu_b^y &= -\partial_y u_b^x + (i + \gamma^2) \partial_y^2 u_b^y. \end{aligned} \quad (4.12h)$$

Продифференцируем третье уравнение в (4.12h) ещё один раз по  $y$ , и подставим в него выражение для  $\partial_y^2 u_b^x$  из второго уравнения. Получим:

$$\partial_y (\gamma^2 \partial_y^2 + i) u_b^y = 0. \quad (4.12i)$$

Решением, не возрастающим при удалении от стенки и удовлетворяющим граничному условию на ней, является (мы восстанавливаем размерности всех величин)

$$u_b^y = \frac{ik}{\kappa} (1 - e^{-\kappa y}) u, \quad \kappa = \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu}} = \frac{1-i}{\delta}, \quad (4.12j)$$

где выбор общего множителя оправдан дальнейшим выражением (4.12l) для касательной компоненты скорости. Теперь, из последнего уравнения (4.12h) получаем, что

$$\partial_y u_b^x = -i\kappa \gamma^2 + \kappa e^{-\kappa y}. \quad (4.12k)$$

Константу интегрирования следует положить равной нулю, поскольку она соответствует вкладу в исходную акустическую волну. Таким образом,

$$u_b^x = -\left(e^{-\kappa y} + \frac{k}{\kappa} \kappa y\right) u. \quad (4.12l)$$

Давление

$$p_b = -\frac{k}{\kappa} \cdot \kappa y \cdot cu. \quad (4.12m)$$

Второе слагаемое в выражении (4.12l) для  $u_b^x$  имеет смысл только далеко вне вязкого подслоя; внутри него его учёт был бы превышением точности, поскольку оно там относительно мало как  $\gamma^2$ , а поправками этого порядка мы пренебрегли, когда в (4.12f) заменили лапласиан на вторую производную по нормали,  $\Delta \rightarrow \partial_y^2$ .

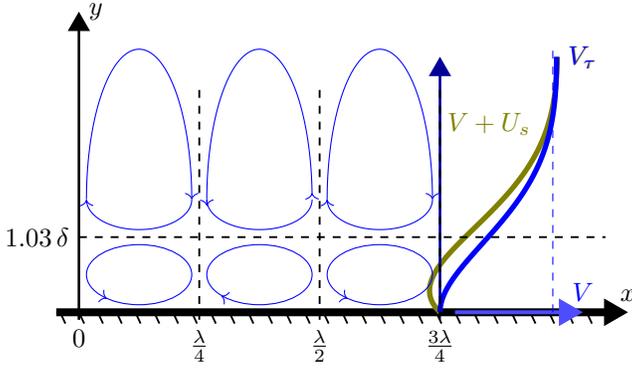


Рис. 4.3 Акустическое течение, индуцированное стоячей волной, распространяющейся вдоль границы.

Индукционное течение почти несжимаемо, о чём свидетельствует относительная малость  $p_b \sim \gamma p_u$  (4.12m); несжимаемую часть будем описывать функцией тока  $\psi$ . Остальная часть, не убывающая с удалением от стенки, представляет собой акустическую волну, описываемую потенциалом  $\phi_b$ . В итоге полное индуцированное стенкой течение имеет вид

$$u_b^x = \partial_y \psi - \partial_x \phi_b, \quad u_b^y = -\partial_x \psi - \partial_y \phi_b. \quad (4.12n)$$

Введённые потенциалы скорости равны

$$\psi = \frac{\zeta(\kappa y) u}{\kappa}, \quad \zeta(\chi) = e^{-\chi}, \quad \phi_b = -\frac{i\kappa y u}{\kappa} = -\frac{k}{\kappa} \kappa y \phi_u, \quad (4.12o)$$

где потенциал исходной волны  $\phi_u$  определён в (4.12b). Если бы мы сразу формулировали уравнения течения в терминах потенциалов  $\psi$  и  $\phi_b$ , то граничными условиями далеко от стенки было бы условие обращения в ноль вихревого потенциала  $\psi$  и отсутствие компоненты, зависящей от координат и времени как  $\exp(ikx - i\omega t)$ , в  $\phi_b$ .

Посчитаем поток энергии к стенке вне вязкого подслоя и покажем, что он равен поверхностной плотности скорости диссипации энергии в вязком подслое. Вне вязкого подслоя

$$j_y^E = \rho_0 \langle p_u u_b^y \rangle = -2\rho_0 c |u_0|^2 k \delta. \quad (4.12p)$$

Поверхностная плотность выделения тепла в вязком подслое

$$2\rho_0 \nu \int_0^\infty \langle (\partial_y u^x)^2 \rangle dy = \rho_0 \nu \frac{|u_0|^2}{\delta} = -j^{E,y}. \quad (4.12q)$$

Представленное решение совпадает с приведённым в работе [Westervelt, 1953]. Оно, однако, отличается от

данного в [Зарембо & Красильников, 1966, с. 212] и [Руденко & Солуян, 1975, с. 221], которое в свою очередь отличается от представленного в [Ландау & Лифшиц, 1986], также не совпадающего с полученным нами ответом.

#### 4-6.1 Нелинейность

В общем случае

$$\begin{aligned} \nu \partial_y^2 V &= \langle u \partial_x u_b^x + u_b^x \partial_x u + u_b^x \partial_x u_b^x + u_b^y \partial_y u_b^x \rangle = \\ &= \partial_x \left\langle u \partial_y \psi + \frac{(\partial_y \psi)^2}{2} \right\rangle - \langle (\partial_x \psi + \partial_y \phi_b) \partial_{yy} \psi \rangle. \end{aligned} \quad (4.12r)$$

Мы пренебрегли вкладом в  $u_b^x$  от рассеянной звуковой волны, которые малы по параметру  $\gamma$ .

Для бегущей волны

$$u_{\text{phys}} = 2 \operatorname{Re} u = 2 \operatorname{Re} (u_0 \exp(ikx - i\omega t)), \quad (4.12s)$$

после перехода к комплексным амплитудам в правой части получаем

$$\begin{aligned} \nu \partial_y^2 V &= -2 \operatorname{Re} \left( (ik)(\kappa^2)^* |\psi|^2 + \frac{iku}{\kappa} (\kappa^2)^* \psi^* \right) \\ &= 2k (|\zeta|^2 + \operatorname{Re} \zeta) |u|^2 = 2k |u_0|^2 \left( e^{-2\tilde{y}} - e^{-\tilde{y}} \cos \tilde{y} \right) \end{aligned} \quad (4.12t)$$

Так что

$$V = \frac{|u_0|^2}{2c} (-1 + e^{-\tilde{y}} \sin \tilde{y} + e^{-2\tilde{y}}) \quad (4.12u)$$

Для стоячей волны

$$u = 2 \operatorname{Re} \frac{u_+ + u_-}{2} = 2 \cos(kx) \operatorname{Re} (u_0 \exp(-i\omega t)), \quad (4.12v)$$

где  $u_{\pm} = u_0 \exp(\pm ikx - i\omega t)$  — поля скорости волн, бегущих вправо и влево соответственно. Функция тока и потенциал (4.12o) равны

$$\begin{aligned} \psi &= 2 \cos(kx) \operatorname{Re} (\zeta e^{-i\omega t} u_0 / \kappa), \\ \phi_b &= 2 \sin(kx) \operatorname{Re} (\kappa y e^{-i\omega t} u_0 / \kappa). \end{aligned} \quad (4.12w)$$

Правая часть (4.12r) преобразуется до выражения

$$\begin{aligned} \nu \partial_y^2 V &= -2k \sin(2kx) |u_0|^2 \operatorname{Re} \left( -2\zeta + |\zeta|^2 + i(\zeta^* - 1)\zeta \right) \\ &= -2k \sin(2kx) |u_0|^2 \left( e^{-\tilde{y}} (\sin \tilde{y} - 2 \cos \tilde{y}) + e^{-2\tilde{y}} \right), \end{aligned} \quad (4.12x)$$

где  $\tilde{y} = y/\delta$ , и, например,  $\zeta'(\kappa y) = \partial_\chi \zeta(\chi)|_{\chi=\kappa y}$ . После интегрирования получаем, что

$$V = \frac{\sin(2kx)}{2} \left( 3 - (4 \sin \tilde{y} + 2 \cos \tilde{y}) e^{-\tilde{y}} - e^{-2\tilde{y}} \right) \frac{|u_0|^2}{c}. \quad (4.12y)$$

Поток массы включает в себя в том числе и дрейф Стокса,  $V_L = V + U_s$ ,

$$U_s = \langle \varrho_u u_b^x \rangle = -\sin(2kx) e^{-\tilde{y}} \sin \tilde{y} \frac{|u_0|^2}{c} \quad (4.12z)$$

1 one

• two

• three

# ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

## §5-1. Одномерное течение жидкости

Одномерное течение жидкости является хорошей моделью для многих течений. Примером одномерного течения является распространение плоской звуковой волны. Тогда как в Главе 4 рассматривалось распространение звуковых волн в линейном режиме по их амплитуде, здесь мы будем интересоваться нелинейными эффектами. Эти нелинейные эффекты оказываются важны при увеличении амплитуды звука.

Сперва имеет смысл рассмотреть течение идеальной жидкости. Законы сохранения вещества, импульса (2.6b) и энтропии для идеальной жидкости при одномерном движении имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\partial_x v = 0, \quad (5.1a)$$

$$\frac{dv}{dt} + (1/\rho)\partial_x P = 0,$$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv \partial_t + v\partial_x.$$

Уравнение сохранения энергии является следствием уже выписанных уравнений, см. Пункт 2-2.2.

Последнее уравнение в (5.1a) уже обсуждалось, см. (2.7c): оно означает, что удельная энтропия для каждого элемента жидкости сохраняется при его движении. Итак, изменение плотности элемента жидкости происходит при постоянной его энтропии, то есть однозначно связано с изменением давления:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left. \frac{\partial\rho}{\partial P} \right|_S \frac{dP}{dt} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{dP}{dt}. \quad (5.1b)$$

Скорость звука  $c$  изменяется во времени и пространстве, являясь функцией состояния жидкости (т.е. давления или плотности, помимо энтропии).

Теперь в первых двух уравнениях (5.1a) можно исключить дифференциалы от плотности  $\rho$ . Запишем эти уравнения в одинаковой размерности:

$$\partial_t P + v\partial_x P + \rho c^2 \partial_x v = 0, \quad (5.1c)$$

$$\rho c \partial_t v + \rho c v \partial_x v + c \partial_x P = 0. \quad (5.1d)$$

Двумя линейными комбинациями этих уравнений являются уравнения:

$$(\partial_t + (c+v)\partial_x)P + \rho c(\partial_t + (c+v)\partial_x)v = 0 \quad (5.1e)$$

$$(\partial_t + (v-c)\partial_x)P - \rho c(\partial_t + (v-c)\partial_x)v = 0 \quad (5.1f)$$

Из этих уравнений следует, что существуют две величины  $J_{\pm}$ , называемые *инвариантами Римана* и характеризующие возмущение жидкости, которые сохраняются, распространяясь вдоль двух семейств характеристик  $C_{\pm}$  соответственно:

$$J_+ = v + \int \frac{dP}{c\rho} = \text{const} \\ \text{along characteristic } C_+ : dx = (c+v)dt,$$

$$J_- = v - \int \frac{dP}{c\rho} = \text{const} \\ \text{along characteristic } C_- : dx = (-c+v)dt. \quad (5.1g)$$

Обратим внимание, что удельная плотность энтропии  $S$  остаётся постоянной вдоль характеристик  $C_0$ :

$$S = \text{const} \quad \text{along characteristic } C_0 : dx = v dt, \quad (5.1h)$$

которая не совпадает с характеристиками  $C_{\pm}$ , и поэтому в общем случае может изменяться вдоль этих характеристик. Это означает, что изменение давления  $dP$  в (5.1g) определяется изменениями как плотности  $d\rho$ , так и удельной энтропии.

### 5-1.1 Бегущая нелинейная волна

Простой волной называют волну, у которой один из инвариантов Римана (5.1g) равен нулю во всём пространстве. Простая волна есть бегущая волна. Если нулевым выбрать инвариант Римана  $J_-$ , то такая простая волна бежит вправо, по направлению увеличения координаты  $x$ . Выбрав значение  $J_- = 0$ , мы предположили, что для каждой характеристики  $C_-$  существует момент в прошлом, когда жидкость находилась в покое.

Предположим также, что течение является изэнтропийным, т.е. удельная энтропия  $S$  однородна в пространстве. Это означает, что жидкость, находясь в покое до прихода волны слева, находилась в тепловом равновесии. Тогда давление полностью определяется плотностью, так что равенство (5.1b) имеет место не только вдоль траектории движения элемента жидкости, но и вообще во всём пространстве. Соответственно, инвариант Римана  $J_-$  также может быть восстановлен интегрированием вдоль любого контура, а не только вдоль

характеристик  $C_-$ ,

$$dP = c^2 d\rho, \quad 0 = J_- = v - \int c \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{or} \quad c(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = dv. \quad (5.1i)$$

Таким образом, плотность  $\rho$  определяется локальным значением скорости  $v$ . Теперь остающийся постоянным вдоль характеристик  $C_+$  инвариант Римана (5.1g) оказывается однозначной функцией скорости,  $J_+ = J_+(v)$ . Поэтому и сама скорость среды вдоль этих характеристик остаётся постоянной:

$$\frac{dx}{dt} = c(v) + v = \text{const} \quad \text{at each } C_+. \quad (5.1j)$$

А значит, остаётся постоянной и скорость распространения возмущения

$$C_+ : \quad x = (c + v)t + x_0, \quad (5.1k)$$

т.е. характеристика  $C_+$  в плоскости  $t$ - $x$  представляет собой прямую линию.

## 5-1.2 Предел малых амплитуд

Если предположить, что амплитуда волны мала, так что  $v \ll c$ , то местную скорость звука достаточно разложить до первого порядка по амплитуде волны

$$c = c_0 + (c' - 1)v + \dots, \quad c' = \frac{3(g+1)}{2}. \quad (5.1l)$$

Безразмерная константа  $g$  определена в разложении эффективной энергии сжимаемой жидкости (4.2d, 4.2e); при выводе соотношения (5.1l) мы в том числе воспользовались линейными соотношениями (4.3l) в волне.

Любая величина ( $v$ ,  $\rho$  и т.д.), которая переносится вдоль характеристик  $C_+$  постоянной, удовлетворяет уравнению типа:

$$(\partial_t + (c_0 + c'v\partial_x))\rho = 0. \quad (5.1m)$$

По сравнению с (5.1e), в (5.1m) произведено разложение местной скорости звука до первого порядка по амплитуде волны (5.1l), и использована зависимость всех величин только от одной из них, см. (5.1i). Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью  $c_0$ , а в качестве переносимой величины возьмём саму перемасштабированную скорость  $u = c'v$ . В результате уравнение (5.1m) переписывается в каноническом виде

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0. \quad (5.1n)$$

Уравнение (5.1n) называется *уравнением Хопфа* (Hopf equation).

На участках, где исходно пространственный профиль скорости имел отрицательную производную,  $\partial_x u < 0$ , со временем возмущения с меньшей координатой догоняют возмущения с большей координатой. Это приводит в конце концов к возникновению сначала точек, в которых скорость меняется бесконечно быстро с

координатой,  $\partial_x u \rightarrow -\infty$ . Это явление называют *отрокидыванием*. Ниже здесь мы рассматриваем это явление в рамках уравнения Хопфа на примере исходно монохроматической волны. После достижения этой точки уравнения Римана перестают быть применимыми в окрестности такой точки.

### 5-1.2.1 Эволюция исходно монохроматической волны конечной амплитуды

• **Задача 1:** Рассмотрите эволюцию плоской бегущей звуковой волны в идеальной жидкости. Определите расстояние, на котором образуется слабая ударная волна и уже точно нельзя игнорировать процессы диссипации. В начальный момент времени волна является монохроматической. Течение является изэнтропийным.

*Решение:* В начальный момент времени пространственное распределение скорости в волне есть

$$v(t = 0, x_0) = v_0 \cos(kx_0). \quad (5.2a)$$

Мы имеем дело с простой волной, распространяющейся в условиях изэнтропийности. Поэтому скорость  $v$ , плотность жидкости  $\rho$  и местная скорость звука связаны между собой однозначными соотношениями. Мы используем (5.1l) в силу малости амплитуды волны.

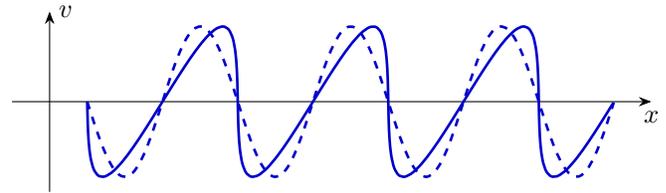


Рис. 5.1 Исходный профиль волны (штрихованная линия) и профиль волны по истечении времени  $0.94t^*$ .

Положение точки на характеристике через время  $t$

$$x = c_0 t + c'kv_0 t \cos(kx_0) + x_0. \quad (5.2b)$$

Профиль скорости в пространстве можно характеризовать его производной, которая равна

$$\partial_x v|_t = \frac{\partial v}{\partial x_0} / \frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{kv_0 t \sin(kx_0)}{1 - c'kv_0 t \sin(kx_0)}, \quad (5.2c)$$

где мы воспользовались (5.2a, 5.2b). Как видно, с течением времени профиль волны всё больше начинает отклоняться от синусоиды.

Образование слабой ударной волны соответствует точке, в которой скорость меняется в пространстве очень быстро, формально имея бесконечную производную по координате. В бесконечность производная (5.2c) впервые обращается, когда  $c'kv_0 t^* = 1$ . То есть после того, как волна пробежит расстояние

$$l^* = c_0 t^* = \frac{1}{c'} \frac{c_0}{v_0} \frac{\lambda}{2\pi}, \quad t^* = \frac{1}{c'kv_0}. \quad (5.2d)$$

После точки (5.2d) при достаточной амплитуде волны образуются ударные волны, в которых нельзя игно-

рировать процессы диссипации.

## §5-2. Ударная волна

При изучении простых волн Римана, смотри § 5-1, был обнаружен эффект опрокидывания. После достижения точки опрокидывания течение не может быть полностью описано уравнениями идеальной жидкости. Если волна исходно была достаточно интенсивной, то образуется ударная волна. Ударная волна представляет собой фронт, то есть узкую область, при прохождении через которую все или часть термодинамических величин претерпевает сильное изменение, и в которой интенсивно происходят диссипативные процессы. Вн этой области диссипативные процессы по-прежнему не существенны. Возможно рассмотреть предел, при котором эта узкая область сокращается до математической плоскости. Таким образом, будем описывать уравнениями идеальной жидкости течения, в которых присутствуют *поверхности разрыва*. При переходе через поверхность разрыва определённые термодинамические величины, в том числе удельная энтропия, претерпевают скачок. Это означает, что на границе раздела происходят диссипативные процессы.

Рассмотрим *ударную волну*, в которой скорость жидкости направлена нормально к поверхности разрыва по обе стороны от неё. Вне области фронта течение описывается уравнениями идеальной жидкости. Будем считать, что фронт движется слева на право. Величины, относящиеся к среде слева от фронта, будем снабжать индексом '2', справа — индексом '1'. Схематично ударная волна изображена на Рисунке 5.2.

Перейдём в систему отсчёта, в которой фронт ударной волны покоится. Поперёк разрыва выполняются законы сохранения вещества, импульса и энергии, т.е. равны потоки массы  $j$ , импульса (2.6a) и энергии (2.7i) слева на право. Одинаковое значение какой-либо величины  $A$  по разные стороны фронта мы будем также обозначать как равенство нулю скачка этой величины при переходе через фронт,  $[A] = 0$ . Итак, законы сохранения дают равенства

$$\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1 \equiv [\rho v] \equiv [j] = 0, \quad (5.3a)$$

$$[P + \rho v^2] = 0, \quad \left[ v \left( \rho^E + P + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right] = 0.$$

Из этих равенств можно получить другие, более удобные в дальнейших вычислениях комбинации. Во-первых, можно переписать условие равенства нулю скачка потока энергии, используя постоянство потока массы, в виде

$$\left[ \mathcal{W} + \frac{v^2}{2} \right] = 0. \quad (5.3b)$$

Равенства (5.3a, 5.3b) называют *условиями Ренкина-Гюгонно* (Rankine-Hugoniot conditions or Rankine-Hugoniot jump conditions or Rankine-Hugoniot relations). Во-вторых, выражение для потока массы через разницы давлений и обратных плотностей имеет вид:

$$j^2 = \frac{P_2 - P_1}{\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2}, \quad \mathcal{V} = 1/\rho, \quad (5.3c)$$

где  $\mathcal{V}$  есть объём, приходящийся на единицу массы. При фиксированном потоке массы  $j$  уравнение (5.3c) задаёт *линию* на плоскости  $P$ - $V$ , которая носит имя *Релея* (Rayleigh line). Линия Релея изображена ниже на Рисунке 5.3. Далее, для разности скоростей

$$v_1 - v_2 = (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)j. \quad (5.3d)$$

Из выписанных равенств (5.3c, 5.3d) следует, что все ниже выписанные скачки при переходе через фронт

$$[P] = P_2 - P_1, \quad [\rho] = \rho_2 - \rho_1, \quad -[v] = v_1 - v_2 \quad (5.3e)$$

имеют одинаковый знак. Если этот знак положительный, как это будет показано ниже для большинства сред, то имеет место также соотношение

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(P_2 - P_1)(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)}. \quad (5.3f)$$

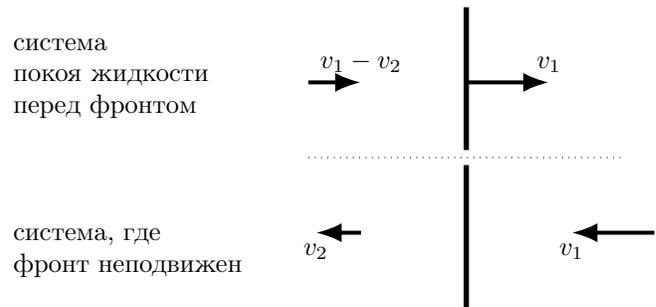


Рис. 5.2 Скорости жидкости в системе покоя жидкости и в системе покоя фронта.

Энтропия также испытывает скачок при прохождении через фронт. Поскольку энтропия может только увеличиваться, то движению фронта слева направо соответствует неравенство

$$S_2 - S_1 > 0. \quad (5.3g)$$

### 5-2.1 Адиабата Гюгонио

Для разницы удельных (массовых плотностей) внутренних энергий получаем уравнение

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{(P_2 + P_1)(\nu_1 - \nu_2)}{2}. \quad (5.4a)$$

Это уравнение, связывающее между собой  $P_2, \nu_2$  при известных  $P_1, \nu_1$ , называют *адиабатой Гюгонио* или *ударной адиабатой (shock-Hugoniot adiabat)*. Поскольку удельные энтальпия и энергия связаны соотношением

$$\mathcal{W} = \varepsilon + P\nu,$$

то (5.4a) можно переписать в виде

$$w_2 - w_1 = \frac{(P_2 - P_1)(\nu_1 + \nu_2)}{2}. \quad (5.4b)$$

С формальной точки зрения уравнение ударной адиабаты (5.4a) значительно отличается от, скажем, уравнения адиабаты Пуассона для изоэнтропийного процесса. Тогда как адиабата Пуассона задаётся уравнением типа  $f_{Poisson}(P, \nu; S) = 0$ , уравнение (5.4a), задающее ударную адиабату, имеет вид  $f(P_1, \nu_1; P_2, \nu_2) = 0$  с симметрией

$$f(P_2, \nu_2; P_1, \nu_1) = -f(P_1, \nu_1; P_2, \nu_2). \quad (5.4c)$$

Вследствие этого уравнение на ударную адиабату задаёт двух-параметрическое семейство кривых на плоскости  $P$ - $\nu$  (двумя параметрами являются значения  $P_1, \nu_1$  в состоянии перед фронтом волны), тогда как адиабаты Пуассона образуют одно-параметрическое семейство кривых (параметром является энтропия  $S$ ).

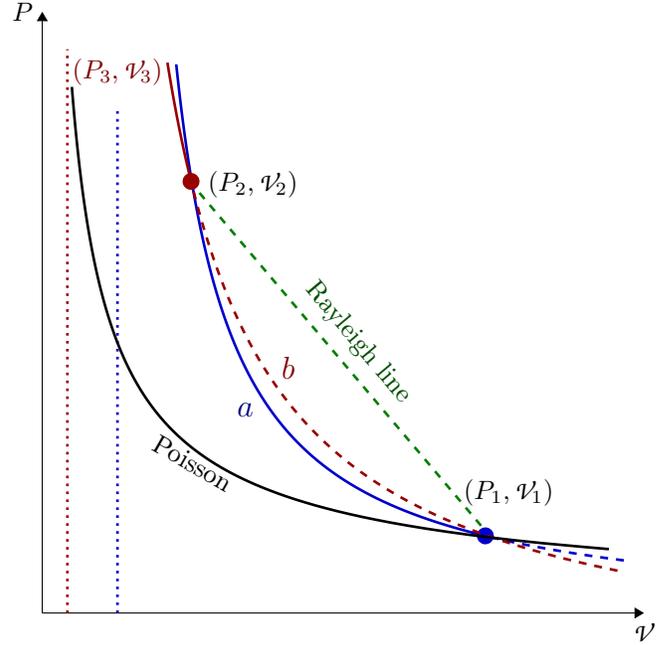


Рис. 5.3 Ударные адиабаты, построенные для идеального газа с  $\gamma = 1.4$ . Жирными точками обозначены состояния газа перед фронтом. Сплошные линии — возможные состояния за фронтом.

Вертикальные линии из точек соответствуют максимально возможной степени сжатия (5.4o), для выбранной модели равной 6.

На Рис. 5.3 в качестве примеров построены графики ударных адиабат идеального газа. Адиабата ‘a’ имеет начальной точкой состояние ‘1’. Выберем состояние ‘2’ в качестве состояния после фронта на ударной адиабате ‘a’. Предположим, что это состояние является начальным для ещё одной ударной волны, распространяющейся следом за первой. Состояния после фронта второй ударной волны лежат на ударной адиабате ‘b’, см. Рис. 5.3. В силу симметрии уравнения Гюгонио (5.4c), ударная адиабата ‘b’ проходит также и через состояние ‘1’.

#### 5-2.1.1 Адиабата Пуассона и выбор типичных свойств среды

Ниже мы будем полагать, что во всём диапазоне релевантных термодинамических состояний адиабатическая сжимаемость падает с увеличением давления, т.е. выполняется неравенство

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right|_S > 0. \quad (5.4d)$$

Неравенство (5.4d) хотя и выполняется для большинства сред, тем не менее, не является термодинамическим неравенством. Существуют примеры сред, где оно нарушается — сейчас такие случаи мы не рассматриваем.

Проведём адиабату Пуассона через точку '1' на Рис. 5.3. Если выполнено (5.4d), то адиабата Пуассона вогнута вниз, как изображено на Рис. 5.3.

В дополнение к условию (5.4d) также примем, что реализован и другой наиболее частый случай, когда среда расширяется при нагревании, то есть

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P > 0. \quad (5.4e)$$

Тогда объём растёт с увеличением энтропии, поскольку

$$\left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_P = \frac{T}{C_p} \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right|_P \quad \text{as} \quad dS = \frac{C_p}{T} dT \quad \text{at} \quad P = \text{const.}$$

В результате приходим к выводу, что состояниями после ударной волны для адиабаты 'а' могут быть только точки, лежащие выше адиабаты Пуассона в силу условия возрастания энтропии (5.3g). Именно так на Рис. 5.3 взаимно расположены адиабата Пуассона и возможные состояния за фронтом на адиабате Гюгионо.

## 5-2.2 Слабая ударная волна

Положим, что разность давлений за и перед фронтом мала,

$$P_2 - P_1 \ll P_1.$$

Этот предел называется слабой ударной волной. Исследуем свойства слабой ударной волны. Помимо прочего, это позволит нам понять, как взаимно расположены адиабаты Гюгионо и Пуассона в точке их пересечения. В частности, оказывается, что точка пересечения является точкой касания второго порядка. Это означает, что у этих кривых совпадают первая и вторая производные в точке пересечения, а отличия начинаются только с производных третьего порядка.

Для исследования свойств слабой ударной волны удобно перейти в координаты  $S$ - $P$ , поскольку адиабата Пуассона соответствует  $S = \text{const}$ . Произведём разложение уравнения ударной адиабаты в ряд по степеням величин скачков

$$\delta S = S_2 - S_1, \quad \delta P = P_2 - P_1.$$

Будем использовать форму записи уравнения ударной адиабаты (5.4b), поскольку его правая часть уже пропорциональна  $\delta P$ . Как мы ожидаем,  $\delta S \propto (\delta P)^3$ , поэтому разложение производим до первого порядка по  $\delta S$  и до третьего порядка по  $\delta P$ . Напомним, что дифференциал удельной энтальпии равен

$$d\mathcal{W} = TdS + \mathcal{V}dP.$$

Левая часть уравнения (5.4b) — скачок удельной энтальпии  $\delta\mathcal{W} = \mathcal{W}_2 - \mathcal{W}_1$  — приближённо равна

$$\delta\mathcal{W} = T\delta S + \mathcal{V}\delta P + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right|_S (\delta P)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial P^2} \right|_S (\delta P)^3, \quad (5.4f)$$

где все величины в правой части перед приращениями должны браться в точке '1'. В правой части уравнения на ударную адиабату (5.4b) надо учитывать зависимость удельного объёма только от давления, поскольку учёт зависимости от энтропии дал бы поправки порядка  $\delta S \cdot \delta P \propto (\delta P)^4$ , которыми мы должны пренебрегать:

$$\frac{(\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_1)\delta P}{2} = \mathcal{V}\delta P + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right|_S (\delta P)^2 + \frac{1}{4} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial P^2} \right|_S (\delta P)^3, \quad (5.4g)$$

где, опять, все величины в правой части перед приращениями должны браться в точке '1'.

Приравнявая правые части (5.4f,5.4g), приходим к соотношению

$$\delta S = \frac{1}{12T} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial P^2} \right|_S (\delta P)^3. \quad (5.4h)$$

Во-первых, мы убедились, что, действительно, скачок энтропии в слабой ударной волне пропорционален кубу скачка давления. Во-вторых, в силу сделанного предположения (5.4d) о свойствах среды, давление позади фронта должно быть больше давления перед ним,

$$P_2 > P_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2, \quad v_1 > v_2. \quad (5.4i)$$

Этот знак определяет знаки и в скачках остальных величин, смотри (5.3e). В частности, за фронтом происходит сжатие жидкости.

Отметим, что адиабата Гюгионо вогнута вниз, поскольку, как мы показали, её вторая производная совпадает со второй производной адиабаты Пуассона.

## 5-2.3 Скорости перед и за фронтом

Перейдём к определению скоростей течения в ударной волне. Устремим сначала амплитуду ударной волны к нулю. Тогда поток массы  $j$  (5.3c) равен производной давления по удельному объёму при постоянной энтропии в силу пренебрежимой малости её скачка (5.4h):

$$j^2 = - \left. \frac{\partial P}{\partial \mathcal{V}} \right|_S = \frac{c_1^2}{\mathcal{V}^2}, \quad (5.4j)$$

где  $c_1$  — скорость звука в точке '1', смотри (4.1e). Итак, касательная к ударной адиабате в точке '1' к адиабате 'а' пропорциональна квадрату скорости звука.

Теперь рассмотрим конечные  $\delta P$  и  $\delta \mathcal{V}$ . Скорости звука в состояниях '1' и '2' равны  $c_1$  и  $c_2$  и определяются (5.4j). Прямая Релея имеет наклон больше наклона касательной к адиабате 'а' в точке '1'. Поскольку адиабата 'b' вогнута вниз, то наклон прямой Релея меньше наклона касательной к этой адиабате в точке '2'; последний же определяется выражением, аналогичным (5.4j). Поэтому имеем следующую цепочку неравенств и равенств:

$$\frac{c_1^2}{\mathcal{V}_1^2} < \frac{v_1^2}{\mathcal{V}_1^2} = \frac{v_2^2}{\mathcal{V}_2^2} < \frac{c_2^2}{\mathcal{V}_2^2}, \quad (5.4k)$$

где равенство следует из сохранения потока массы  $j = v/V$ , см. (5.3a). Отсюда получаем неравенства (добавим также сюда неравенство (5.4i))

$$c_1 < v_1, \quad v_2 < c_2, \quad v_2 < v_1. \quad (5.4l)$$

Скорость движения фронта относительно жидкости за фронтом меньше местной скорости звука. Поэтому фронт ударной волны могут достигать слабые возмущения, приходящие из области '2'. Наоборот, скорость движения фронта относительно жидкости перед фронтом больше местной скорости звука. Поэтому слабые возмущения не могут распространяться от ударной волны вперёд, обгоняя её саму. Наличие ударной волны никак не сказывается на состоянии газа перед ней.

Все полученные неравенства распространяются на ударные волны произвольной амплитуды.

### §5-3. Образование ударных волн в плоской звуковой волне

Продолжим рассмотрение эволюции плоской простой звуковой волны конечной амплитуды, начатое в Пункте 5-1.2.1. Для определённости продолжим считать, что волна бежит вправо — в направлении увеличения координаты  $x$ . Как следует из решения задачи Пункта 5-1.2.1, с течением времени в плоской простой волне образуются поверхности, на которых скорость имеет бесконечную пространственную производную. Соответствующие моменты являются моментами образования слабых ударных волн. Формально, описание эволюции волны в терминах инвариантов Римана перестаёт работать левее фронта ударной волны. Однако, если волна слабо нелинейна, то возможно построить приближённое решение, работающее в том числе и позади фронтов слабых ударных волн и при этом основывающееся на решении для простой волны.

Будем работать в лабораторной системе координат и потому изменим обозначения для скорости по сравнению с принятыми в § 5-2, см. Рисунок 5.2. Новые обозначения приведены на Рисунке 5.4. Предполагающаяся слабая нелинейность означает, что скорость  $v$ , индуцированная волной, мала по сравнению со скоростью звука,

$$v \ll c. \quad (5.5a)$$

Зафиксируем скачок давления  $\delta P = P_2 - P_1$  на ударной волне. Приступая к сравнению ударной волны и простой волны, во-первых, напомним, что в простой волне, распространяющейся в изэнтропийной жидкости, все величины однозначно связаны между собой, см. (5.1i). С другой стороны, в слабой ударной волне скачок энтропии  $\delta S$  (5.4h) параметрически мал, будучи пропорционален кубу скачка давления. Поэтому и скачки всех остальных величин (скорости, плотности, температуры

### 5-2.4 Идеальный газ

Напомним, что для идеального газа удельная энергия

$$\mathcal{E} = \frac{P\mathcal{V}}{\gamma - 1}, \quad (5.4m)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты Пуассона. Уравнение для ударной адиабаты (5.4a) может быть представлено в виде

$$\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = \frac{(\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_2}{(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_2}. \quad (5.4n)$$

Отсюда следует, что максимально возможный коэффициент сжатия (минимальное отношение  $V_2/V_1$ ) достигается при устремлении к бесконечности отношения давлений  $P_2/P_1 \rightarrow \infty$  и оказывается равным

$$\left. \frac{\rho_2}{\rho_1} \right|_{\max} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (5.4o)$$

и т.д.) на ударной волне отличаются от соответствующих приращений для простой волны только в третьем порядке по  $\delta P$ . Заключаем, что решение для простой волны, формально продолженное за моменты образования ударных волн, по-прежнему годится в качестве главного приближения с точностью до того, что части этого решения в областях, где функция  $v(t, x)$  становится многозначной, должны быть заменены на фронты, см. Рисунок 5.4.

Найдём скорость  $u$  перемещения фронта (а, значит, и его положение) ударной волны. Закон сохранения вещества (5.3a) в текущих обозначениях имеет вид

$$\rho_1(v_- - u) = \rho_2(v_+ - u) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\rho_2 v_+ - \rho_1 v_-}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (5.5b)$$

Выражение для  $u$  (5.5b) не изменится с точностью до первого порядка малости по  $\delta P$  включительно, если вместо скачков величин  $\rho v$  и  $\rho$  мы возьмём их приращения для простой волны. В том же первом порядке по  $\delta P$  выражение для  $u$ , записанное уже через приращения для простой волны, совпадает с производной  $d(\rho v)/d\rho$  в этой волне, взятой на полу-скачке плотности, то есть при плотности  $\bar{\rho} = (\rho_1 + \rho_2)/2$ . С нашей точностью вычислений следует считать, что это значение плотности соответствует также и полу-скачку скорости,  $\bar{v} = (v_+ + v_-)/2$ . Таким образом, скорость перемещения фронта

$$\frac{dx_s}{dt} \equiv u = \left. \frac{d(\rho v)}{d\rho} \right|_{v=\bar{v}} + \mathcal{O}((\delta P)^2),$$

i.e.  $u = (c + v)|_{v=\bar{v}} = c_0 + c' \frac{v_+ + v_-}{2}, \quad (5.5c)$

где равенство  $dv/d\rho = c/\rho$  согласно (5.1i) является следствием сохранения инварианта Римана  $J_-$ , а безразмерная величина  $c'$  введена согласно (5.1l).

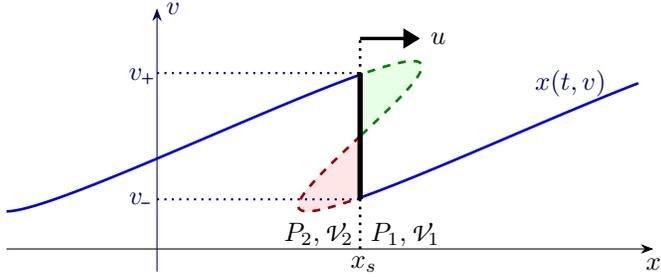


Рис. 5.4 Фронт ударной волны в звуковой волне слабой интенсивности. Координата фронта равна  $x_s$ , его скорость  $u$ , так что  $dx_s/dt = u$ . Перед фронтом скорость жидкости равна  $v_-$ , за фронтом она равна  $v_+$ .

Скорость перемещения фронта ударной волны (5.5c), будучи проинтегрированной по времени, определяет положение фронта  $x_s$ . Положение фронта можно установить и другим способом согласно следующему геометрическому правилу. Пусть координата  $x = x(t, v)$  (5.1k) есть положение возмущения в простой волне, характеризующегося скоростью  $v$ , к моменту времени  $t$ :

$$x = (c + v)t = (c_0 + c'v)t, \quad (5.5d)$$

см. Рис. 5.4. Сейчас мы используем (5.5d) независимо от того факта, что в тех областях, где произошло опрокидывание, это выражение не имеет физического смысла. Геометрическое правило состоит в том, что положение фронта определяется условием

$$\int_{-}^{+} (x_s - x(t, v)) dv = 0, \quad (5.5e)$$

т.е. равенством площадей зелёной и розовой областей на Рис. 5.4. При этом надо учитывать, что  $x(t, v)$  является в общем случае многозначной функцией скорости, и при проведении интегрирования следует выбирать правильную её ветвь.

Для того, чтобы доказать (5.5e), продифференцируем это соотношение по времени и воспользуемся (5.5c, 5.5d):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-}^{+} (x_s - x) dv &= \\ &= (u - c_0) \int_{-}^{+} dv - \int_{-}^{+} (c + v - c_0) dv = \\ &= c' \left( \bar{v} \delta v - \frac{v_+^2 - v_-^2}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.5f)$$

Мы учли, что значение интегранда в (5.5e) на границах области интегрирования равно нулю, поэтому изменение пределов интегрирования во времени не вносит вклад в производную интеграла. Таким образом, интеграл (5.5e) не изменяется во времени. Его значение в момент образования ударной волны равно нулю, т.е. (5.5e) верно.

### 5-3.1 Треугольный импульс

Рассмотрим эволюцию одиночного треугольного импульса. А именно, пусть в начальный момент времени имеется бегущее вправо возмущение, длительность которого по координате  $x$  равна  $l$ . Скорость отлична от нуля в интервале  $0 < x < l$ , где она равна  $v = xV_0/l$ . Таким образом, положение ударной волны в начальный момент времени  $x_s(t = 0) = l$ . Литература: [Ландау & Лифшиц, 1986, § 102].

Из геометрических построений, показанных на Рисунке 5.4, следует, что форма импульса так и будет оставаться треугольной. Проведём на Рисунке 5.5 эти же геометрические построения для конкретно треугольного импульса с тем, чтобы определить его параметры.

В движущейся со скоростью  $c_0$  системе координат точки  $A$  и  $B$  остаются неподвижными. Точка  $C$  движется со скоростью  $V_0$ , так что пространственная протяжённость импульса ( $x$ -координата точки  $C'$ ) в момент времени  $t$  равна  $x_s = l + V_0t$ . Согласно геометрическому принципу, выраженному уравнением (5.5e), площади треугольников  $DC'O$  и  $BOE$  равны. С другой стороны, равны площади треугольников  $ACB$  и  $AC'B$ , как имеющие общее основание и одинаковую высоту. Поэтому площади треугольников  $ACB$  и  $ADE$  также равны. Распишем последнее равенство:

$$\begin{aligned} S(ACB) &= lV_0 = \\ &= S(ADE) = LV = x_s^2 \frac{DE}{AE} = x_s^2 \frac{C'B'}{AB'} = x_s^2 \frac{V_0}{l + V_0t}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $V$  есть максимальное значение скорости в импульсе (вертикальная координата точки  $D$ ). Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} x_s &= \sqrt{(l + c'V_0t)l}, & \frac{dx_s}{dt} &= \frac{\sqrt{l} c' V_0}{2\sqrt{(l + c'V_0t)}}, \\ V &= \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l + V_0t}} V_0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

То, что  $\dot{x}_s > 0$  означает, что фронт движется со скоростью, превышающей скорость распространения  $c_0$  линейных волн.

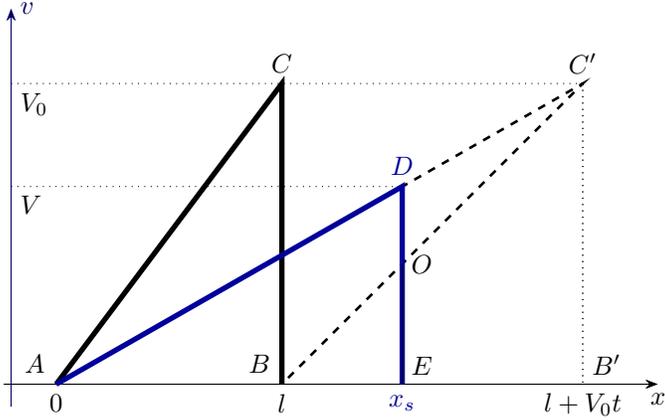


Рис. 5.5 Эволюция импульса с треугольным профилем.

Посчитаем полную поверхностную энергию  $E$ , связанную с импульсом. Мы будем пренебрегать изменением удельной энтропии жидкости, возникающим после прохождения фронта. Тогда

$$E = \int_0^{x_s} dx \left( \frac{\rho v^2}{2} + \varepsilon(\rho) \right), \quad (5.8)$$

где объёмная плотность энергии  $\varepsilon(\rho)$  определена в (4.2d). Ограничимся вычислением энергии в квадратичном приближении по амплитуде импульса, для этого достаточно взять (5.1i) в линейном приближении по отклоне-

нию от равновесия,

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 = \frac{\rho_0}{c_0} v. \quad (5.9)$$

Тогда внутренняя энергия равна кинетической, и вместе они на больших временах спадают как корень пройденного импульсом расстояния,

$$E = \frac{x_s \rho_0 V^2}{2} = \frac{\rho_0 l V_0^2}{2\sqrt{1 + c' V_0 t/l}}. \quad (5.10)$$

### 5-3.2 Задачи

• **Задача 1:** Найдите разность  $\delta v - \delta'v$  скачка скорости  $\delta v = v_+ - v_-$  на ударной волне и соответствующего приращения скорости  $\delta'v$  в простой волне. Выразите эту разность через скачок давления  $\delta P$  на ударной волне.

• **Задача 2:** Рассмотрите эволюцию периодической последовательности ударных волн с треугольным профилем, в частности, зависимость амплитуды ударных волн от времени. Такую последовательность можно рассматривать как некоторую промежуточную асимптотику эволюции изначально монохроматической звуковой волны конечной амплитуды, см. Пункт 5-1.2.1. *Указание:* Пусть период равен  $\lambda$ , а положения некоторых двух соседних ударных волн в начальный момент времени суть  $x = \pm\lambda/2$ . В начальный момент времени между этими точками скорость линейно меняется с координатой,  $v = w_0 x$ ,  $|x| \leq \lambda/2$ .

## §5-4. Диссипативные процессы в одномерном течении

Запишем законы сохранения количества вещества, импульса и энергии при одномерном течении. Закон сохранения вещества не изменяется по сравнению с (5.1a):

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (5.12a)$$

Закон сохранения импульса в общем виде имеет вид (2.8d), который для одномерного течения сводится к

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x \left( \frac{\rho v^2}{2} + P - \zeta' \partial_x v \right) = 0. \quad (5.12b)$$

Отметим, что логика появления комбинации  $\zeta'$  первой и второй вязкостей та же самая, что и при исследовании звуковых волн, см. (4.5d), поскольку одномерное течение есть частный случай потенциального. Закон сохранения энергии (2.10g) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \rho^E + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \\ + \partial_x \left( \rho v \left( \frac{v^2}{2} + w \right) - \frac{\zeta' \partial_x v^2}{2} - \varkappa \partial_x T \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.12c)$$

Учёт диссипативных членов привёл к тому, что в уравнениях (5.12b, 5.12c) появились вторые производные. В результате система уравнений (5.12) не может быть решена методом характеристик, как это было сделано для уравнений одномерного течения идеальной жидкости (5.3a).

### 5-4.1 Слабая ударная волна

Продолжим здесь развивать описание слабой ударной волны, начатое в § 5-3, теперь с учётом диссипативных процессов.

Конечные вязкость и теплопроводность жидкости приводят к тому, что фронт ударной волны теперь не является математической плоскостью, а имеет конечную толщину  $\delta$ . Об ударной волне имеет смысл говорить тогда, когда эта толщина остаётся малой. А именно, когда масштаб изменения всех величин до и после ударной волны намного превышает её ширину  $\delta$ . Далеко впереди и сзади ударной волны все поля выходят на свои постоянные значения, которые мы будем обозна-

чать индексами '1' и '2' соответственно.

Ширина ударной волны  $\delta$  тем меньше, чем меньше коэффициенты теплопроводности  $\alpha$  и вязкости  $\zeta'$ . С другой стороны, если амплитуда ударной волны  $\delta P = P_2 - P_1$  стремится к нулю, то ширина ударной волны должна возрастать, поскольку в пределе  $\delta P \rightarrow 0$  собственно нет и ударной волны. Как мы увидим ниже,

$$\delta \propto \frac{1}{\delta P}, \quad (5.13a)$$

$$\partial_x P, \partial_x \mathcal{V} \propto (\delta P)^2 \quad \text{inside shock},$$

что означает, что давление и удельный объём меняются плавно внутри фронта от значений  $P_2, \mathcal{V}_2$  за ним до значений  $P_1, \mathcal{V}_1$  перед ним. Вне фронта все пространственные производные стремятся к нулю.

Мы можем ожидать, что в системе отсчёта, где фронт ударной волны покоится (эта система отсчёта использовалась в § 5-3), распределение полей в пространстве является стационарным. То есть,  $\partial_t = 0$  в (5.12). Перейдём в эту систему отсчёта. Закон сохранения вещества (5.12a) примет вид

$$\rho v = j. \quad (5.13b)$$

Закон сохранения импульса (5.12b) с учётом (5.13b) может быть записано в виде

$$P - P_1 + j^2(\mathcal{V} - \mathcal{V}_1) - \zeta' j \partial_x \mathcal{V} = 0, \quad (5.13c)$$

Величины без индекса взяты в произвольной точке  $x$ ; если эта произвольная точка оказывается далеко за фронтом, то величины следует снабдить нижним индексом '2'. Уравнение (5.13c) совпадает с (5.3c) при удалении точки  $x$  далеко за фронт. Наконец, уравнение на сохранение энергии (5.12c) приобретает вид

$$\mathcal{W} - \mathcal{W}_1 + \frac{j^2}{2}(\mathcal{V}^2 - \mathcal{V}_1^2) - j\zeta' \mathcal{V} \partial_x \mathcal{V} - \frac{\alpha}{j} \partial_x T = 0. \quad (5.13d)$$

При удалении точки  $x$  далеко за фронт оно совпадает с (5.4b) с учётом (5.3c).

Линейная комбинация (5.13d) с уравнением (5.13c), домноженным на  $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$ , даёт уравнение

$$(\mathcal{W} - \mathcal{W}_1) - (P - P_1) \frac{\mathcal{V} + \mathcal{V}_1}{2} = \frac{\alpha}{j} \partial_x T. \quad (5.13e)$$

В (5.13e) мы опустили вклад, пропорциональный  $(\mathcal{V} - \mathcal{V}_1) \partial_x \mathcal{V}$ , поскольку согласно (5.13a) его малость оценивается как  $(\delta P)^3$ , а как мы сейчас покажем, лидирующие вклады в (5.13e) пропорциональны  $(\delta P)^2$ . Напомним (5.4h), что полный скачок энтропии на ударной волне кубичен по её амплитуде,

$$\delta S \equiv S_2 - S_1 \propto (\delta P)^3,$$

Мы можем рассчитывать, что и внутри ударной волны вариация энтропии настолько мала, что в (5.13e) мы можем приближённо заменить  $\partial_x T \rightarrow (\partial T / \partial P)|_S \partial_x P$ . Далее, используем ряды (5.4f, 5.4g) для разложения первых

двух слагаемых в (5.13e) по  $\delta P$ , удерживая не более чем квадратичные члены:

$$T(S - S_1) = \frac{\alpha}{j} \frac{\partial T}{\partial P} \Big|_S \partial_x P. \quad (5.13f)$$

Равенство (5.13f) означает, что приращение энтропии внутри фронта ударной волны  $S - S_1$  является величиной второго порядка по её амплитуде согласно (5.13a). Таки образом, скачок энтропии по разные стороны фронта оказывается параметрически меньше, чем разность значения энтропии вне фронта и внутри него.

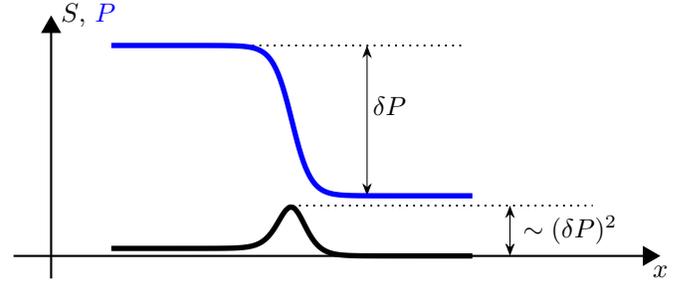


Рис. 5.6 Фронт ударной волны слабой интенсивности с учётом диссипативных процессов.

#### 5-4.1.1 Простая волна малой амплитуды в среде с диссипацией

Уравнения (5.12) описывают волны, распространяющиеся одновременно в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox$ . Мы хотели бы описать волну, бегущую только вправо. В случае идеальной жидкости такая волна называется простой и уравнение на неё легко выделяется методом характеристики, см. Пункт 5-1.1. Диссипативные члены в уравнениях (5.12) содержат вторые производные по координате. С ними метод характеристик строго говоря более не применим.

Мы получим уравнение для волны, бегущей только в одном направлении, пользуясь его компоновкой из уравнений в предельных случаях.

Линейное уравнение для волны, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси  $Ox$ , выписано в (4.5l):

$$\left( \partial_t + c_0 \partial_x - \mu \partial_x^2 \right) v = 0. \quad (5.13g)$$

Если же мы хотим обобщить это уравнение на случай слабой нелинейности, то мы должны учесть, что возмущение распространяется не с фиксированной скоростью  $c_0$ , а со скоростью  $c_0 \rightarrow c(v) + v$ , см. (5.1j, 5.1k). При слабой нелинейности имеет место линейное разложение скорости распространения возмущения по его амплитуде, см. (5.1l, 5.1m). Поэтому приходим к уравнению

$$\partial_t v + (c_0 + c'v) \partial_x v = \mu \partial_x^2 v. \quad (5.13h)$$

Теперь перейдём в движущуюся систему отсчёта со скоростью  $c_0$  и перемасштабируем поле скорости, введя новое поле  $u = c'v$ . В результате придём к уравнению Бюргерса (*Burgers' equation*)

$$\partial_t u + u \partial_x u = \mu \partial_x^2 u. \quad (5.13i)$$

По сравнению с уравнением Хопфа (5.1n) уравнение Бюргерса содержит диссипативный член в правой части.

**Шок.** Имея ввиду слабую ударную волну, будем искать решение, у которого производная  $\partial_x u$  затухает на далёких расстояниях, и которое движется с постоянной скоростью  $u_0$ , то есть для которого

$$\partial_t u + u_0 \partial_x u = 0. \quad (5.13j)$$

Выразив временную производную посредством связи (5.13j) в уравнении Бюргерса (5.13i), получим

$$(u - u_0)^2 - 2\mu \partial_x u = u_1^2/4, \quad (5.13k)$$

где  $u_1 > 0$  — константа интегрирования. Искомое решение имеет вид

$$u = u_0 - \frac{u_1}{2} \tanh \frac{x - x_0 - u_0 t}{\delta}, \quad \delta = \frac{4\mu}{u_1}. \quad (5.13l)$$

Решение (5.13l) называется *шоком*. Амплитуда шока, то есть скачок скорости на нём, равна  $u_1$ . Ширина шока  $\delta$  обратно пропорциональна амплитуде шока, как и было анонсировано в (5.13a).

**Преобразование Коула-Хопфа.** Уравнение Бюргерса (5.13i) может быть сведено к линейному уравнению путём замены:

$$u(t, x) = -2\mu \partial_x \ln(\Psi(t, x)). \quad (5.13m)$$

Поле  $\Psi$  удовлетворяет линейному уравнению диффузии

$$\partial_t \Psi = \mu \partial_x^2 \Psi. \quad (5.13n)$$

## §5-5. Квази-одномерное течение через сопло

Реактивное движение летающих аппаратов осуществляется посредством двигателя, ключевым элементом которого является сопло, через которое происходит истечения газа с большой скоростью. Сопло представляет собой трубу сечения  $S(z)$ , которое медленно меняется вдоль трубы (по мере увеличения координаты  $z$ ).

В простейшей модели течение газа можно считать однородным вдоль поперечного сечения трубы и стационарным во времени. Газ полагаем идеальной жидкостью. Труба начинается внутри некоторого сосуда, где скорость жидкости можно считать равной нулю. Конец трубы погружён в окружающую среду (также жидкость или газ), имеющую давление  $P_e$ . Для того, чтобы про-

### 5-4.2 Эволюция исходно монохроматической волны

Пусть исходная волна имела монохроматический профиль (5.2a),

$$u(t = 0, x) = u_0 \sin(kx). \quad (5.13o)$$

Мы решали такую задачу в случае идеальной жидкости и получили, что за конечное время  $t^* = 1/ku_0$  (5.2d) образуется ударная волна. После этого волну можно приблизительно описать последовательность треугольных импульсов, чем было мотивировано решение задачи, см. Пункт 5-3.2. Теперь расширим рассмотрение задачи на случай конечной диссипации.

• **Задача 1:** Пусть начальным состоянием волны является (5.13o), причём у волны большая амплитуда в смысле  $u_0/k \gg \mu$ . i) Пользуясь формализмом, основанном на преобразовании Коула-Хопфа (5.13m), найдите амплитуду волны на больших временах  $t \gg 1/\mu k^2$ . Как эта амплитуда зависит от начальной амплитуды волны  $u_0$ ? ii) Рассмотрите времена  $1/ku_0 \ll t \ll 1/\mu k^2$ . Покажите, что непосредственное решение уравнения Бюргерса через преобразование Коула-Хопфа с начальным условием (5.13o) соответствует решению задачи о последовательности треугольных импульсов в пределе бесконечно малой вязкости и теплопроводности и элементарному решению уравнения Бюргерса в виде шока (5.13l). В частности, чему будет равна ширина областей, в которых градиент скорости достигает максимальных значений? *Указание:* Используйте то, что результатом диффузии исходно сконцентрированного вблизи некоторой точки “вещества” на больших временах всегда является гауссова форма его пространственного распределения, а также то, что уравнение диффузии — линейно.

исходило истечение газа из сосуда, давление  $P_0$  газа нём должно быть больше,  $P_0 > P_e$ .

### 5-5.1 Свободное стационарное течение

Сперва продолжим общие рассуждения для стационарного течения, начатые в Пункте 2-7.2, предположив, что внешний потенциал отсутствует,  $\varphi = 0$ , т.е. течение является свободным. А именно, установим ограничения на параметры стационарного течения вдоль какой-либо линии тока.

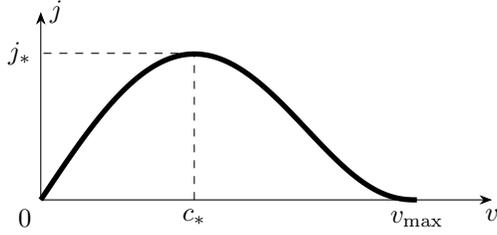


Рис. 5.7 Зависимость плотности потока массы  $j$  от скорости. Был взят политропный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ , так что критическая скорость (5.17d)  $c_* \approx 0.41v_{\max}$ .

Во-первых, согласно уравнению Бернулли (2.19b) тепловая функция  $\mathcal{W}$  достигает своего максимума там, где скорость обращается в нуль:

$$\mathcal{W}_0 = \frac{v^2}{2} + \mathcal{W}. \quad (5.14a)$$

Обратное рассуждение приводит к заключению, что и абсолютное значение скорости течения ограничено некоторым значением  $v_{\max}$ . Это значение может быть определено из закона Бернулли (5.14a): скорость  $v$  максимальна там, где удельная энтальпия минимальна,  $\mathcal{W} \rightarrow \min$ . Согласно (2.19c) этот минимум достигается при минимально возможном значении давления, которое есть нуль,  $P = 0$ ; для газа этот передел при фиксированной энтропии (2.19d) соответствует нулевой температуре  $T = 0$ . Поэтому естественным для данной задачи является выбор точки отсчёта энергии, при которой тепловая функция равна нулю при  $P = 0, T = 0$ . Таким образом,

$$v_{\max} = \sqrt{2\mathcal{W}_0} \quad (5.14b)$$

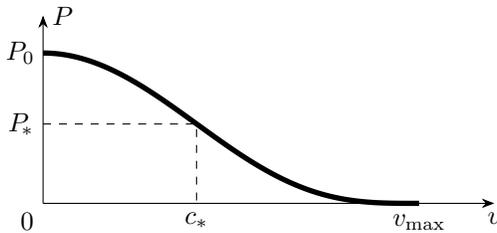


Рис. 5.8 Зависимость давления  $P$  от скорости. Был взят политропный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ .

Во-вторых, установим связь между изменениями плотности потока массы  $j = \rho v$  и скорости  $v$ . Для этого надо связать между собой приращения массовой плотности  $d\rho$  и скорости  $dv$  вдоль линии тока. В уравнении (2.19c) изменение давления  $dP$  однозначно определяется изменением плотности  $d\rho$  в силу сохранения энтро-

пии, см. (2.19d), так что

$$dP = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_S \equiv c^2 d\rho, \quad (5.14c)$$

где величина  $c$  называется скоростью звука (она является функцией состояния жидкости). Теперь уравнение (2.19c)

$$v dv = -\frac{dP}{\rho} = -\frac{c^2 d\rho}{\rho} \quad (5.14d)$$

может быть переписано в виде

$$\frac{dj}{dv} = \rho \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad j = \rho v. \quad (5.14e)$$

Это равенство означает, что пока скорость течения дозвуковая,  $v < c$ , то плотность потока массы  $j$  увеличивается с ростом скорости. При преодолении скоростью течения скорости звука, когда течение сверхзвуковое,  $v > c$ , плотность потока массы снижается при дальнейшем увеличении скорости течения. Плотность потока массы достигает максимума, когда скорость достигает своего критического значения  $v = c_*$ :

$$j_* = \rho_* c_*, \quad c_* < v_{\max}. \quad (5.14f)$$

Величина критической скорости и соответствующее состояние жидкости определяется системой уравнений

$$\frac{c_*^2}{2} + \mathcal{W}_* = \mathcal{W}_0, \quad S_* = S_0. \quad (5.14g)$$

Значение отношения критической и максимальной скоростей  $c_*/v_{\max} < 1$  в общем случае определяется двумя константами — удельной энтропией и удельной энтальпией при нулевой скорости течения. В частности, для идеального газа оно является константой, зависящей только от показателя политропы газа.

## 5-5.2 Течение через сопло

Теперь вернёмся к изучению течения через сопло. Закон сохранения массы накладывает связь на плотность потока массы в течении  $j = \rho v$  и поперечное сечение  $S$ : их произведение есть расход массы, который остаётся постоянным вдоль трубы,

$$Q = jS = \rho v S = \text{const}. \quad (5.15)$$

Из общего рассмотрения Пункта 5-5.1 следует, что плотность потока массы  $j$  имеет ограничение сверху,  $j < j_*$ , где величина  $j_*$  (5.14f) соответствует точке, в которой местная скорость звука сравнивается со скоростью течения  $v$ . Величина  $j_*$  зависит только от удельной энтальпии  $\mathcal{W}_0$  газа в сосуде. Отсюда заключаем, что если в потоке и достигается равенство  $j = j_*$ , то, согласно (5.15), только там, где площадь поперечного сечения сопла достигает своего минимума,  $S = S_{\min}$ .

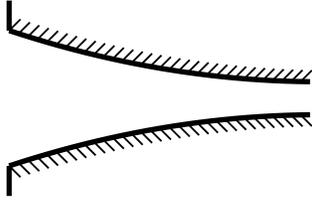


Рис. 5.9 Монотонно сужающееся сопло.

Кинетическая сила  $F$ , действующая со стороны вытекающего газа на сопло и жидкость в сосуде, т.е. в целом на летательный аппарат, равна

$$F = Qv. \quad (5.16)$$

Таким образом, при фиксированном расходе вещества  $Q$  задача достижения максимума кинетической силы  $F$  сводится к достижению максимума скорости истечения  $v$ . Согласно графику Рисунка 5.8, это означает минимизацию давления в струе на выходе из сопла.

В вытекающей струе давление должно быть не меньше внешнего давления  $P_e$ . Это можно понять, передвигаясь в радиальном направлении из выходящей струи в окружающую среду. Если бы внешнее давление было больше, то струя стала бы уже начиная с самого выхода из сопла, т.е. сузилась бы эффективное выходное сечение сопла. С другой стороны, если в вытекающей струе давление больше внешнего, то по мере удаления от выходного конца сопла струя будет уширяться, но это уже находится за рамками нашего текущего рассмотрения.

**Монотонно суживающееся сопло.** Рассмотрим монотонно сужающееся сопло, пример которого изображён на Рисунке 5.9. Сужение сопла приводит к увеличению плотности потока  $j$  согласно условию сохранения полного потока (5.15). Увеличение  $j$  приводит к движению вправо по кривой  $j(v)$ , см. Рисунок 5.7. Однако, поскольку скорость истечения в устье сопла  $v_0$  всегда меньше скорости звука, то увеличением  $j$  возможно достигнуть не более чем значения  $c_*$  для скорости  $v$ .

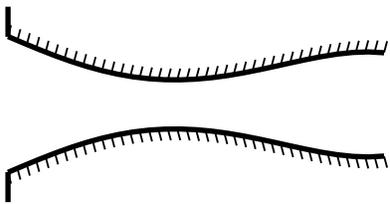


Рис. 5.10 Сопло Лавалья.

### Сопло Лавалья.

## 5-5.3 Задачи

• **Задача 1:** Для стационарного течения идеального газа в точке достижения скоростью течения  $v$  местной скорости звука  $c_*$  определить отношение  $c_*/v_{\max}$ . Показатель адиабаты газа равен  $\gamma$ .

*Решение:* Удельная энергия идеального газа  $\mathcal{E} = C_v T$ , где  $C_v$  — удельная теплоёмкость при постоянном объёме, см. (2.10l, 2.10m), а его уравнения состояния есть уравнение Клайперона-Менделеева,  $P\mathcal{V} = (C_p - C_v)T$ , где показатель адиабаты  $C_p/C_v = \gamma$ . Условие изэнтропийности есть

$$P\mathcal{V}^\gamma = P_0\mathcal{V}_0^\gamma. \quad (5.17a)$$

Удельная энтальпия  $\mathcal{W} = \mathcal{E} + P\mathcal{V} = C_p T$ . Местная скорость звука (5.14c)

$$\begin{aligned} c^2 &= \gamma P\mathcal{V} = \gamma(C_p - C_v)T = (\gamma - 1)\mathcal{W} = \\ &= (\gamma - 1)\mathcal{W}_0 \left(\frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}}\right)^{\gamma-1} c_0^2. \end{aligned} \quad (5.17b)$$

Здесь  $c_0$  — местная скорость звука при нулевой скорости течения. Отметим, что скорость звука пропорциональна квадратному корню из температуры,  $c \propto \sqrt{T}$ .

Уравнение Бернулли (5.14g) принимает вид

$$\frac{\gamma + 1}{2} \mathcal{W}_* = \mathcal{W}_0, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (5.17c)$$

то есть, с учётом выражения для максимально возможной скорости течения  $v_{\max}$  (5.14b)

$$c_* = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{2\mathcal{W}_0} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} c_0. \quad (5.17d)$$

Отношение удельного объёма  $\mathcal{V}_*$  при достижении критической скорости к удельному объёму  $\mathcal{V}_0$  при нулевой скорости течения

$$\frac{\mathcal{V}_*}{\mathcal{V}_0} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (5.17e)$$

Для двухатомного газа  $\gamma = 1.4$ . Тогда  $c_0 \approx 0.45 v_{\max}$ ,  $c_* \approx 0.41 v_{\max}$ , отношение объёмов  $\mathcal{V}_*/\mathcal{V}_0 \approx 1.58$ .

• **Задача 2:** Решить уравнение на плотность потока  $j(v)$  (5.14e) в стационарном течении идеальной жидкости для политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma$ . Найти зависимость давления от скорости течения  $P(v)$ .

*Решение:* Уравнение (5.14d) с учётом выражений для местной скорости звука (5.17b) и максимально возможной скорости течения (5.14b) может быть проинтегрировано до вида

$$\frac{v^2}{v_{\max}^2} = 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}. \quad (5.17f)$$

Плотность потока (5.14e)

$$j = \rho_0 v \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (5.17g)$$

Зависимость изображена на графике Рисунка 5.7. Максимальная плотность потока  $j_*$  достигается в точке (5.17d) и оказывается равной

$$j_* = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(2\gamma-1)/(\gamma-1)} \rho_0 c_0. \quad (5.17h)$$

Из найденного решения (5.17f) и условия изэнтропийности (5.17a) получаем зависимость давления от скорости течения:

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (5.17i)$$

Для двухатомного, газа  $\gamma = 1.4$ , значение давления в точке  $v = c_*$  есть  $P_* \approx 0.53 P_0$ .

• **Задача 3:** Рабочим телом реактивного двигателя является двухатомный идеальный газ. Молекулы газа имеют массу  $m = 30$  а.е.м. На входе в сопло температура газа равна  $T_0 = 1000^\circ\text{C}$ , давление  $P_0 = 2$  атм. Давление в окружающей среде равно  $P_e = 0.5$  атм. Расход вещества у двигателя  $Q = 0.5$  кг/с. Найдите тягу двигателя, если i) сопло является монотонно суживающимся с минимально возможной площадью сечения на выходе; ii) используется сопло Лаваля с максимально возможной площадью сечения на выходе. Чему равны площади поперечного течения сопла на выходе в обоих случаях?

# Глава 6 ДВУМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

## §6-1. Двумерное течение

Уравнение двумерной гидродинамики часто содержит в себе дополнительный член по сравнению с уравнением Навье-Стокса. Этот член описывает дополнительный диссипативный процесс трения движущейся жидкости о подложку (или дно):

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v} + \mathbf{f}_u, \quad (6.1)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент трения о дно. Для идеальной двумерной жидкости равны нулю как вязкость, так и коэффициент трения о дно.

Для двумерного течения завихренность

$$\varpi = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha v^\beta = \partial_x v^y - \partial_y v^x \quad (6.2)$$

является псевдо-скаляром. Уравнение на завихренность в двумерном случае

$$\partial_t \varpi + (\mathbf{v} \nabla) \varpi = \nu \Delta \varpi - \alpha \varpi + f, \quad f = \partial_x f_u^y - \partial_y f_u^x. \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) следует из трёх-мерного уравнения (2.12g), есть скорость считать формально не изменяющейся в направлении, нормальном к плоскости течения.

Для несжимаемого течения полезно ввести функцию тока

$$v^\beta = \epsilon^{\beta\gamma} \partial_\gamma \Psi, \quad \varpi = -\Delta \Psi \quad (6.4)$$

### 6-1.1 Идеальная двумерная гидродинамика

Если пренебречь обоими процессами диссипации (трением о дно и вязкостью), то согласно (6.3) завихренность сохраняется вдоль лагранжевой траектории. Таким образом, помимо полной кинетической энергии, у течения существует ещё бесконечно много интегралов движения — завихренности каждой лагранжевой частицы. По-другому об этом можно сказать, что сохраняется любой момент завихренности,

$$\frac{d}{dt} \varpi = 0, \quad \Rightarrow \quad \langle \varpi^n \rangle = \text{const}. \quad (6.5)$$

# ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

## §7-1. Свободная поверхность жидкости

Литература: [Nazarenko & Lukaschuk, 2016].

Рассмотрим движение несжимаемой жидкости плотности  $\rho$  в поле тяжести. Жидкость снизу ограничена дном, а сверху имеет свободную поверхность. То, что поверхность свободная, означает, что к её поверхности не приложены какие-либо внешние силы. Такое может быть, если над жидкостью расположена другая жидкость, гораздо менее плотная по сравнению с самой жидкостью (например, воздух над водой). Поэтому среду над жидкостью можно считать безмассовой, но определяющей, тем не менее, давление над жидкостью.

Введём декартову систему координат  $Oxyz$  с третьей осью, направленной вертикально вверх, так что свободная граница жидкости в состоянии её покоя есть  $z = 0$ , см. Рисунок 7.1.

Изменение формы поверхности приводит к изменению потенциальной энергии жидкости, поэтому действие силы тяжести в этом случае не сводится просто к гидростатической добавке к давлению. В уравнении Навье-Стокса (2.12c) сила тяжести появляется как внешняя объёмная сила  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}/\rho = \mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$  — ускорение свободного падения:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}. \quad (7.1)$$

### 7-1.1 Форма поверхности

Форму свободной поверхности жидкости можно описать зависимостью

$$z = \eta(t, x, y). \quad (7.2a)$$

Введём обозначение  $\mathbf{n}$  для вектора нормали к поверхности, компоненты которого равны

$$\mathbf{n} = \frac{\{-\partial_x \eta, -\partial_y \eta, 1\}}{\sqrt{1 + \partial_\alpha \eta \partial_\alpha \eta}}. \quad (7.2b)$$

Проекция вектора нормали на ось  $Oz$  всегда положительна, так что можно сказать, что он направлен вверх, из жидкости, см. Рис. 7.1. Обычно мы будем предполагать, что форма поверхности слабо отличается от плоской. Критерием этого является условие малой *крутизны* (*steepness*) поверхности

$$\sqrt{\partial_\alpha \eta \partial_\alpha \eta} \ll 1, \quad (7.2c)$$

где буквы из начала греческого алфавита  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  в качестве векторных индексов пробегают значения первых двух (горизонтальных) координат  $\{x, y\}$ . Проектор на касательную к поверхности жидкости плоскость есть

$$\delta_{ik}^\perp = \delta_{ik} - n_i n_k. \quad (7.2d)$$

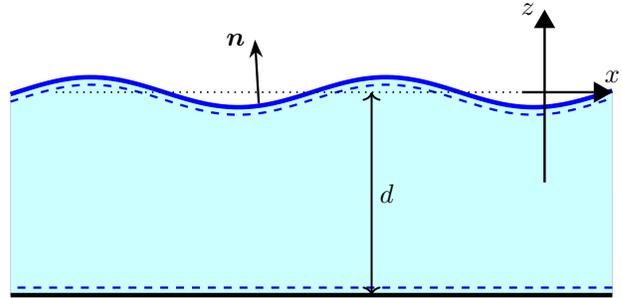


Рис. 7.1 Свободная поверхность жидкости

Средняя кривизна поверхности равна

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{div } \mathbf{n} = \partial_\alpha n_\alpha, \quad (7.2e)$$

где  $R_{1,2}$  — главные кривизны поверхности (они положительны, если поверхность выгнута вверх). Выражение  $\text{div } \mathbf{n} \equiv \partial_i n_i$  предполагает, что поле единичного вектора  $\mathbf{n}$  продолжено гладким образом с поверхности в пространство вблизи неё. Эта процедура продолжения не является однозначной. Выражение  $\partial_\alpha n_\alpha$  можно рассматривать как результат одного из вариантов этого продолжения, когда поле  $\mathbf{n}$  не зависит от вертикальной координаты  $z$ . Выбор знака кривизны в (7.2e) соответствует отрицательной кривизне в точке на Рис. 7.1, где изображён вектор нормали, если считать, что вдоль третьего  $y$ -направления поверхность однородна. В пределе малой крутизны поверхности и достаточной медленности её изменения кривизна есть

$$1/\bar{R} = -\Delta^\perp \eta, \quad (7.2f)$$

где мы ввели обозначения для операторов Лапласа и волнового числа в горизонтальной плоскости,

$$\Delta^\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad \hat{k} = \sqrt{-\Delta^\perp}. \quad (7.2g)$$

Если распределение скорости в объёме жидкости обозначить стандартно  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ , то закон изменения во

времени формы поверхности определяется уравнением

$$\partial_t \eta = v_z - v_x \partial_x \eta - v_y \partial_y \eta \equiv v_z - v^\alpha \partial_\alpha \eta. \quad (7.2h)$$

Это уравнение мы будем называть *кинематическим граничным условием*.

### 7-1.1.1 Динамическое описание поверхности

Пусть  $\Phi(t, \mathbf{r})$  — некоторая гладкая функция, знак которой определяет тип среды:  $\Phi < 0$  соответствует среде 'Г',  $\Phi > 0$  — среде 'П'. Поверхность  $\Phi = 0$  есть граница раздела. Поле скорости  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$  будем считать определённым в обеих средах, т.е. во всём пространстве. В случае с жидкостью со свободной поверхностью среда 'Г' есть жидкость, а среда 'П' — воздух. Выражение для вектора нормали  $\mathbf{n}$  (7.23e), направленного из среды 'Г' в среду 'П', в терминах функции  $\Phi$  переписывается в виде

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}. \quad (7.2i)$$

Интегрирование по поверхности  $d^2S$  может быть переписано как интегрирование по объёму с поверхностной  $\delta^{(\Gamma)}$ -функцией,

$$\oint_{\Gamma} d^2S \dots = \int d^3r \delta^{(\Gamma)}(\mathbf{r}) \dots, \quad \delta^{(\Gamma)}(\mathbf{r}) = |\nabla \Phi| \delta(\Phi). \quad (7.2j)$$

Легко убедиться, что, если  $\theta(x)$  — функция Хевисайда, то градиент индикаторной функции  $\theta = \theta(-\Phi)$  — функции, которая равна единице внутри среды 'Г' и нулю вне неё, — равен

$$\text{grad}(\theta(-\Phi)) = -\delta^{(\Gamma)} \mathbf{n}. \quad (7.2k)$$

Для описания напряжений, возникающих на поверхности раздела, нам понадобится соотношением

$$\partial_k (\delta^{(\Gamma)} \delta_{ik}^\perp) = -\frac{n_i}{R} \delta^{(\Gamma)}, \quad (7.2l)$$

где средняя кривизна  $1/\bar{R}$  есть (7.2e). В случае поверхностных волн одним из наиболее простых выбором для функции  $\Phi$  является

$$\Phi = z - \eta(x, y, t) = 0, \quad (7.2m)$$

где функция  $\eta$  (7.2a) задаёт форму поверхности. Проводя выкладки, нам понадобится формально знать динамику  $\Phi$ . Будем считать, что поле  $\Phi$  переносится средой, так что

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi) = 0. \quad (7.2n)$$

В частности, получаем, что производная по времени индикаторной функции

$$\partial_t \theta = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \delta^{(\Gamma)}. \quad (7.2o)$$

## 7-1.2 Граничные условия

Будем полагать, что у поверхности жидкости есть поверхностное натяжение  $\sigma$ ; параметр  $\sigma$  неизменен по всей поверхности. Тогда поверхностное натяжение создаёт только разницу давлений между точками под поверхностью и над ней, равную  $\sigma/\bar{R}$ , где средняя кривизна  $\bar{R}$  определена в (7.2e).

Динамические граничные условия на поверхности, выражающие собой закон сохранения импульса, удобно записать в системе координат, в которой в данный момент рассматриваемый элемент поверхности жидкости покоится. В этой системе координат граничными условиями являются

$$-\sigma_{ik} n_k \equiv P n_i - \sigma'_{ik} n_k = \frac{\sigma}{\bar{R}} n_i = \sigma n_i \partial_\alpha n_\alpha, \quad (7.3a)$$

где давление  $P$  отсчитывается от атмосферного, а  $\sigma_{ik}$  и  $\sigma'_{ik}$  суть тензор напряжений в жидкости (2.8c) и его вязкая часть (2.12e). Спроектируем векторное равенство (7.3a) отдельно на нормаль и на плоскость, касательную к поверхности жидкости:

$$n_i : \quad P - 2\eta n_i n_k \partial_i v_k = \sigma/\bar{R}, \quad (7.3b)$$

$$\delta_{li}^\perp : \quad \delta_{li}^\perp (\partial_i v_k + \partial_k v_i) n_k = 0. \quad (7.3c)$$

Первое уравнение (7.3b) есть верное в статике уравнение Юнга-Лапласа для избыточного давления под искривлённой поверхностью раздела, скорректированное вязкими силами, появляющимися вследствие неоднородности течения жидкости. Второе уравнение (7.3c) есть условие того, что по касательной к поверхности жидкости не приложена внешняя сила, которая могла бы компенсироваться только вязкими касательными напряжениями в жидкости.

**Дно.** В случае вязкой жидкости граничным условием является равенство нулю полной скорости на дне,  $\mathbf{v} = 0$ .

### 7-1.2.1 Силы, приложенные на поверхности раздела

Покажем здесь, как в общий поток импульса может быть включен вклад, производимый поверхностью или тонкой плёнкой, толщина которой в математическом смысле считается равной нулю.

Поток импульса во всём пространстве, включая поверхность, разделяющую две среды, имеет вид

$$P_{ik} = \rho(\mathbf{r}) v_i v_k + P \delta_{ik} - \sigma'_{ik} - \delta^{(\Gamma)} \sigma \delta_{ik}^\perp. \quad (7.4a)$$

Последнее слагаемое в (7.4a) локализовано на поверхности и возникает вследствие её поверхностного натяжения. Это слагаемое можно сравнить с  $P$ -вкладом:  $\sigma$  есть взятое с обратным знаком давление в двумерной среде, располагающейся на границе раздела. Материальные параметры, такие как массовая плотности  $\rho$ , претерпевают скачок  $[\rho]$  при переходе через поверхность

раздела из среды ‘П’ в среду ‘Г’:

$$\rho(\mathbf{r}) = \theta\rho_I + (1 - \theta)\rho_{II}, \quad [\rho] = \rho_I - \rho_{II}. \quad (7.4b)$$

Также скачок претерпевает давление  $P$ ; однако скорость  $\mathbf{v}$  мы полагаем непрерывной во всём пространстве. Для задачи о несжимаемой жидкости со свободной поверхностью массовая плотность  $\rho(\mathbf{r}) = \theta\rho$  и динамическая вязкость  $\eta(\mathbf{r}) = \theta\eta$ , где величины  $\rho$  и  $\eta$  в правых частях суть константы, характеризующие эту жидкость. В результате поток импульса

$$\Pi_{ik} = \theta\rho v_i v_k + P\delta_{ik} - \theta\eta(\partial_i v_k + \partial_k v_i) - \delta^{(\Gamma)}\sigma\delta_{ik}^\perp. \quad (7.4c)$$

Динамическим уравнением в общем случае является, как и раньше

$$\partial_t(\rho(\mathbf{r})v_i) + \partial_k\Pi_{ik} = 0. \quad (7.4d)$$

В области внутри одной из сред уравнение (7.4c) есть обычное уравнение Навье-Стокса. Теперь потребуем выполнения равенства (7.4d) на границе, т.е. приравняем в нём нулю коэффициент перед поверхностной  $\delta^{(\Gamma)}$ -функцией. Выписываем слагаемые в том порядке, в котором они даны в (7.4d, 7.4c):

$$\begin{aligned} & [\rho]v_k n_k v_i - [\rho]v_k n_k v_i - \\ & - [P]n_i + [\sigma'_{ik}]n_k + \left( \frac{\sigma n_i}{R} - \delta_{ik}^\perp \partial_k \sigma \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.4e)$$

Первая строчка в (7.4e) даёт нуль. Выражение в круглой скобке в (7.4e) есть поверхностная сила, действующая на элемент поверхности со стороны поверхностного натяжения. Проекция второй строчки на нормаль  $n_i$  даёт уравнение (7.3b). Последнее слагаемое в (7.4e) не ноль тогда, когда поверхностное натяжение меняется вдоль границы. Если оно постоянно, то проекция (7.4e) на плоскость, касательную к границе, даёт (7.3c).

### 7-1.3 Проводящая жидкость в электрическом поле

Рассмотрим теперь идеально проводящую жидкость со свободной поверхностью. Будем считать, что она имеет фиксированную разность потенциала с идеально проводящей горизонтальной плоскостью, расположенной высоко над поверхностью жидкости. Разность потенциалов такова, что то вертикальная компонента электрического поля в образованном поверхностью жидкости и пластиной плоском конденсаторе равна  $E^{(0)}$ , если поверхность жидкости плоская. Поверхностное натяжение жидкости равно  $\sigma$ , её массовая плотность равна  $\rho$ . Определим закон дисперсии линейных волн на поверхности жидкости. Как оказывается, существует пороговое значение амплитуды электрического поля, при котором поверхность становится неустойчивой. Релятивистские эффекты, в том числе эффекты излучения волн, будем считать не существенными.

Пусть  $\sigma_e(t, x, y)$  — поверхностная плотность электрического заряда. Потенциал электрического поля  $\varphi_E$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi_E = -4\pi\sigma_e\delta^{(\Gamma)}. \quad (7.5a)$$

Потенциал, создаваемый верхней пластиной, равен  $\varphi_{E,\text{ext}} = -zE^{(0)}$ . Поэтому полный потенциал равен

$$\varphi_E(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma_e(\mathbf{r}')d^2S'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - zE^{(0)}, \quad (7.5b)$$

$$\mathbf{r}' = \{x', y', \eta(t, x', y')\}, \quad d^2S' = \frac{dx'dy'}{n_z},$$

где  $n_z$  есть вертикальная компонента вектора нормали (7.23e). Внутри жидкости электрическое поле равно нулю, а потенциал  $\varphi_E$ , соответственно, равен константе, которую мы выбираем нулём,  $\varphi_E = 0$  при  $z \leq \eta$ . Поэтому часть  $\Pi_E$  потенциальной энергии поверхности, связанная с электрическими силами, равна (пользуемся тем, что  $\varphi_E\delta^{(\Gamma)}$  есть нуль)

$$\begin{aligned} \Pi_E &= \frac{1}{2} \int \rho_{e,\text{tot}} \varphi_E d^3r - \frac{1}{2} \int \rho_{e,\text{ext}} \varphi_{E,\text{ext}} d^3r = \\ &= \frac{1}{2} \int \rho_{e,\text{ext}} (\varphi_E - \varphi_{E,\text{ext}}) d^3r = \end{aligned} \quad (7.5c)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \varphi_{E,\text{ext}} \sigma_e \delta^{(\Gamma)} = -\frac{E^{(0)}}{2} \int d^2S \eta \sigma_e,$$

где  $\rho_{e,\text{ext}}$  — распределение зарядов, создающих внешнее поле, считающееся постоянным во времени, а полное распределение зарядов  $\rho_{e,\text{tot}} = \rho_{e,\text{ext}} + \sigma_e\delta^{(\Gamma)}$ . Итоговый интеграл, стоящий в (7.5b), является расходящимся, что легко проверить, если положить поверхность плоской, а плотность заряда  $\sigma_e$  постоянной величиной. Однако для переменной по горизонтали части потенциала расчёт потенциала (7.5b) вполне применим. Выражение же для компонент электрического поля

$$\mathbf{E} = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\sigma_e(\mathbf{r}')d^2S'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + E^{(0)}\mathbf{e}^z \quad (7.5d)$$

содержит по крайней мере условно сходящиеся интегралы.

Далеко в глубине жидкости (на расстояниях, значительно превышающих характерный масштаб неоднородности поверхности) под интегралом в (7.5d) можно считать поверхность плоской, так что  $z$ -компонента электрического поля (7.5d) равна

$$E_z = -2\pi\bar{\sigma}_e + E^{(0)} = 0, \quad \bar{\sigma}_e = \frac{\int \sigma_e(\mathbf{r})d^2S}{\int dx dy}. \quad (7.5e)$$

Величина  $\bar{\sigma}_e$  есть поверхностная плотность заряда, когда поверхность является плоской; она же есть средняя плоскость заряда искривлённой поверхности, спроектированной на горизонтальную плоскость. Когда поверхность ровная, распределение потенциала обозначим  $\bar{\varphi}_E$ .

Пусть крутизна поверхности мала, см. (7.2c). Определим приближённое выражение для потенциальной

энергии (7.5c) в квадратичном порядке по  $\eta$ . Уравнение на переменную часть потенциала  $\tilde{\varphi}_E = \varphi_E - \bar{\varphi}_E$  в линейном приближении по  $\eta$  есть

$$\Delta \tilde{\varphi}_E = -4\pi(-\bar{\sigma}_e \eta \delta'(z) + \tilde{\sigma}_e \delta(z)), \quad (7.5f)$$

где переменная часть поверхностной плотности заряда  $\tilde{\sigma}_e = \sigma_e - \bar{\sigma}_e$ . Решением этого уравнения является

$$\tilde{\varphi}_E = 2\pi \exp(-\hat{k}|z|) \left( \hat{k}^{-1} \tilde{\sigma}_e + \bar{\sigma}_e \eta \operatorname{sign} z \right). \quad (7.5g)$$

Поскольку в жидкости, при  $z < 0$ , потенциал должен быть равен нулю, то переменная часть заряда связана с формой поверхности соотношением

$$\tilde{\sigma}_e = \bar{\sigma}_e \hat{k} \eta, \quad (7.5h)$$

## §7-2. Гравитационно-капиллярные волны на поверхности идеальной жидкости

Рассмотрим слабо вязкую жидкость. Для такой жидкости течение, связанное с поверхностными волнами, почти по всему объёму можно считать потенциальным. Ненулевая завихренность присутствует только вблизи границ течения в вязком слое  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ . Если толщина вязкого слоя мала по сравнению с глубиной жидкости и длиной волны  $\lambda$ , т.е.  $\delta \ll d, \lambda$ , то можно считать, что течение жидкости всюду потенциально, а сама жидкость является идеальной. Ввиду несжимаемости жидкости для краткости записи мы определили, что давление есть  $\rho P$ , где  $\rho$  — массовая плотность жидкости.

В случае идеальной жидкости мы имеем дело с уравнением Эйлера, для которого граничными условиями является баланс давления на свободной поверхности (проекция (7.3a) с нулевой вязкостью на нормаль  $\mathbf{n}$ )

$$z = \eta: \quad P = (\sigma/\rho) \partial_\alpha n_\alpha. \quad (7.7a)$$

Поскольку завихренность  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , то скорость является потенциальной,

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \phi. \quad (7.7b)$$

Условие несжимаемости  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  для потенциального течения приобретает вид уравнения Лапласа

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Rightarrow \quad \Delta \phi = 0. \quad (7.7c)$$

Граничным условием на свободной поверхности является кинематическое граничное условие (7.2h):

$$\partial_t \eta = -\partial_z \phi + \partial_\alpha \eta \partial_\alpha \phi. \quad (7.7d)$$

К потенциалу можно добавить любую функцию, не зависящую от координат, поэтому условимся, что, если жидкость бесконечно глубокая, то потенциал стремится к нулю при  $z \rightarrow -\infty$ , а также на больших расстояниях

где оператор  $\hat{k}$  определён в (7.2g). Потенциальная энергия (7.5c) в квадратичном по  $\eta$  приближении, таким образом, есть

$$\Pi_E = -\frac{(E^{(0)})^2}{4\pi} \int \eta \hat{k} \eta \, dx dy. \quad (7.5i)$$

Как мы видим, потенциальная энергия является отрицательно определённой квадратичной формой по  $\eta$ .

### 7-1.4 Задачи

в горизонтальном направлении (если область течения также неограничена и по горизонтали), где течение отсутствует. Если глубина жидкости конечна, то граничным условием на дне является

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \phi|_{z=-d} = 0, \quad (7.7e)$$

где теперь  $\mathbf{n}$  — нормаль к твёрдой поверхности, также, по определению, направленная из жидкости.

Удовлетворяя уравнению Лапласа, потенциал в действительности определяется только своим значением на поверхности и её формой. Проведём исключение значения потенциала в объёме. Уравнение Эйлера может быть записано в форме уравнения Бернулли (2.21c):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + P + gz. \quad (7.7f)$$

На поверхности мы можем исключить давление в уравнении Бернулли (7.7f), используя динамическое граничное условие (7.7a), а также переписать кинематическое граничное условие (7.2h) в терминах потенциала:

$$g\eta - \partial_t \phi|_{z=\eta} + \frac{\sigma}{\rho} \partial_\alpha n_\alpha = -\frac{(\nabla \phi)^2}{2} \Big|_{z=\eta}, \quad (7.7g)$$

$$\partial_t \eta + \partial_z \phi|_{z=\eta} = \partial_\alpha \phi \partial_\alpha \eta|_{z=\eta}. \quad (7.7h)$$

В правых частях уравнений мы оставили члены, не содержащие линейных по амплитуде волн вклады.

Уравнения (7.7g, 7.7h) являются в сущности динамическими уравнениями на двумерные поля, зависящие только от горизонтальных координат  $\{x, y\}$ . Зависимость от вертикальной координаты  $z$  определяется зависимостью от горизонтальных координат  $\{x, y\}$ . Действительно, поскольку потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (7.7c) вместе с граничными условиями на поверхности (7.7h) и на дне (7.7e), то он однозначно

определяется своим значением на свободной поверхности

$$\psi(t, x, y) = \phi(t, x, y, \eta(t, x, y)). \quad (7.7i)$$

Таким образом, в качестве двух динамических полей можно взять форму поверхности  $\eta(t, x, y)$  и значение потенциала на поверхности  $\psi(t, x, y)$ . Альтернативой такому выбору является, например, пара из также  $\eta$  и значения потенциала на невозмущённой поверхности  $\phi(t, x, y, z = 0)$ . Поскольку жидкость не везде покрывает плоскости  $z = 0$ , то функция  $\phi(t, x, y, z = 0)$  является аналитическим продолжением функции  $\phi(t, x, y)$  из области  $z < \eta$  (оно возможно, поскольку  $\phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа, но только в том случае, если в области  $\eta < z < 0$  нет особенностей).

### 7-2.1 Гамильтонов формализм

Поскольку волны на поверхности идеальной жидкости являются консервативной системой, то для их описания возможно развить гамильтонов формализм. Полная энергия

$$E = \int dx dy \left( \int_{z=-d}^{\eta} dz \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{g\eta^2}{2} + \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{1}{n_z} - 1 \right) \right) \quad (7.8a)$$

сохраняется во времени. Первое слагаемое в (7.8a) является кинетической энергией, второе — потенциальной, в котором  $n_z$  есть вертикальная компонента нормали  $\mathbf{n}$  (7.23e). Покажем, что уравнения (7.7g, 7.7h) имеют гамильтонову форму,

$$\partial_t \eta = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi}, \quad \partial_t \psi = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta}, \quad \mathcal{H}(\eta, \psi) = E. \quad (7.8b)$$

Здесь  $\psi$  есть значение потенциала на поверхности, см. (7.7i). Вариация (7.8b) по  $\eta$  считается просто и, действительно, приводит к динамическому граничному условию (7.7h). Труднее посчитать вариацию по  $\psi$ . Вариация  $\delta\psi$  соответствует вариации потенциала во всём объёме

$\delta\phi$ , которая также удовлетворяет уравнению Лапласа,  $\Delta(\delta\phi) = 0$ . Вариация кинетической части энергии  $E^T$  в (7.8a) таким образом есть

$$\begin{aligned} \delta E^T &= \int d^3r (\nabla\phi \cdot \nabla\delta\phi) = \oint d^2S (\mathbf{n} \cdot \nabla\phi) \delta\psi = \\ &= \int dx dy (\partial_z \phi - \partial_\alpha \eta \partial_\alpha \phi) \delta\psi, \end{aligned} \quad (7.8c)$$

где интегрирование в весом  $d^2S$  производится по всей границе жидкости, но ненулевой результат набирается только по свободной поверхности, поскольку на твёрдых границах выполняется условие непротекания (7.7e). Вариация потенциальной части энергии по  $\psi$  равна нулю. В результате мы показали, что первая вариация в (7.8b) действительно приводит к кинематическому граничному условию (7.7h).

Посмотрим, как гамильтониан  $\mathcal{H}$  может быть непосредственно выражен через значение потенциала на поверхности  $\psi$ . Точно так же интегрируя кинетическую часть энергии по частям, получаем

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int dx dy \left( \psi \hat{G} \psi + g\eta^2 + \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{1}{n_z} - 1 \right) \right), \quad (7.8d)$$

где действие линейного оператора  $\hat{G}(\eta)$

$$\hat{G}\psi = \partial_z \phi - \partial_\alpha \eta \partial_\alpha \phi \quad (7.8e)$$

нелинейно зависит от формы поверхности  $\eta$ . Итак, кинетическая часть энергии и её вариация согласно (7.8c) суть

$$E^T = \frac{1}{2} \int dx dy \psi \hat{G} \psi, \quad \delta E^T = \int dx dy \delta\psi \hat{G} \psi, \quad (7.8f)$$

т.е. оператор  $\hat{G}$  является симметричным. Обратим внимание, что результат  $\partial_z \phi$ , выраженный через  $\psi$ , зависит как от текущей формы дна, так и от формы поверхности.

## §7-3. Линейные волны на поверхности идеальной жидкости

Пусть поверхность жидкости является неограниченной, а дно является плоским, глубина жидкости в состоянии покоя равна  $d$ .

Рассмотрим предел слабой модуляции формы поверхности жидкости (7.2c). Вслед за вариацией формы поверхности и амплитуда скорости будет также малой. Тогда все уравнения, определяющие динамику течения, достаточно решать в линейном приближении по  $\eta$  и  $\phi$ ; в качестве функции, определяющей давление, возьмём комбинацию

$$p = P + gz, \quad (7.9a)$$

в которой исключён гидростатический быстро меняющийся с высотой вклад. Тогда при постановке граничных условий в линейном по амплитуде волны приближении величины  $\phi$  и  $p$  следует брать при  $z = 0$ . В линейном приближении средняя кривизна (7.2e) задаётся выражением (7.2f). Кинематическое граничное условие (7.2h), динамическое граничное условие (7.3a) и уравне-

ние Бернулли (7.7f) на поверхности принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_t \eta &= -\partial_z \phi|_{z=0}, & \rho P|_{z=\eta} &= \rho p|_{z=0} - g\eta = -\sigma \Delta^\perp \eta, \\ \partial_t \phi|_{z=0} &= p|_{z=0}. \end{aligned} \quad (7.9b)$$

Из этих уравнений мы можем исключить значение давления на поверхности, получив:

$$\partial_t \eta = -\partial_z \phi|_{z=0}, \quad \partial_t \phi|_{z=0} = \left( g - \frac{\sigma}{\rho} \Delta^\perp \right) \eta, \quad (7.9c)$$

что суть линеаризованные уравнения (7.7g, 7.7h).

Поскольку задача однородна по времени и горизонтальным координатам, решение будем искать в терминах комплексных амплитуд, предполагая зависимость всех полей от координат  $t, x, y$  вида

$$\eta = H \exp(i\varphi), \quad \varphi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t, \quad \mathbf{k} = \{k_x, k_y\}, \quad (7.9d)$$

где  $H$  — амплитуда волны. В силу условия несжимаемости (7.7e) осцилляторная зависимость от горизонтальной координаты навязывает экспоненциальную зависимость  $\propto \exp(\pm kz)$  потенциала  $\phi$  от вертикальной координаты  $z$ . Соотношение между экспонентами определяется граничным условием на дне (7.7e), которое для плоского дна упрощается до

$$\partial_z \phi|_{z=-d} = 0. \quad (7.9e)$$

Общие результат действия оператора  $\partial_z$  на гармоническую функцию  $\phi$  на поверхности определяется волновым числом  $k$  и граничным условием на дне, которому удовлетворяет эта функция:

$$\phi \propto \text{ch}(k(z+d)) e^{i\varphi} : \quad \partial_z \phi|_{z=0} = k \text{th}(kd) \cdot \phi|_{z=0}.$$

$$\phi \propto \text{sh}(k(z+d)) e^{i\varphi} : \quad \partial_z \phi|_{z=0} = k \text{cth}(kd) \cdot \phi|_{z=0},$$

$$\partial_z^2 \phi = k^2 \phi. \quad (7.9f)$$

Любую гармоническую функцию общего вида можно разложить по линейному базису выписанных выше гармонических функций, таким образом действие оператора  $\partial_z$  полностью определено.

Теперь мы можем исключить потенциал из (7.9c) и написать волновое уравнение

$$\left( \partial_t^2 + k(g + (\sigma/\rho)k^2) \text{th}(kd) \right) \eta = 0. \quad (7.9g)$$

В этом уравнении  $k$  можно рассматривать как нелокальный линейный оператор (7.2f), действующий в  $(x, y)$  плоскости. Дисперсионное соотношение для поверхностных волн имеет вид

$$\omega = \sqrt{k(g + (\sigma/\rho)k^2) \text{th}(kd)}. \quad (7.9h)$$

Выпишем явно комплексные амплитуды потенциала

и давления:

$$\phi = \frac{i\omega H \text{ch}(k(z+d))}{k \text{sh}(kd)} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (7.9i)$$

$$P = -gz + \frac{\omega^2 H \text{ch}(k(z+d))}{k \text{sh}(kd)} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где  $H$ , напомним, — амплитуда поднятия волны. В частности, отношения амплитуд горизонтальных колебаний жидкости на поверхности и у дна к амплитуде  $H$  колебаний поверхности равны

$$\frac{\|u_z\|_{z=0}}{\|u_\alpha\|_{z=0}} = \text{th}(kd), \quad \frac{\|u_z\|_{z=0}}{\|u_\alpha\|_{z=-d}} = \frac{1}{\text{sh}(kd)}. \quad (7.9j)$$

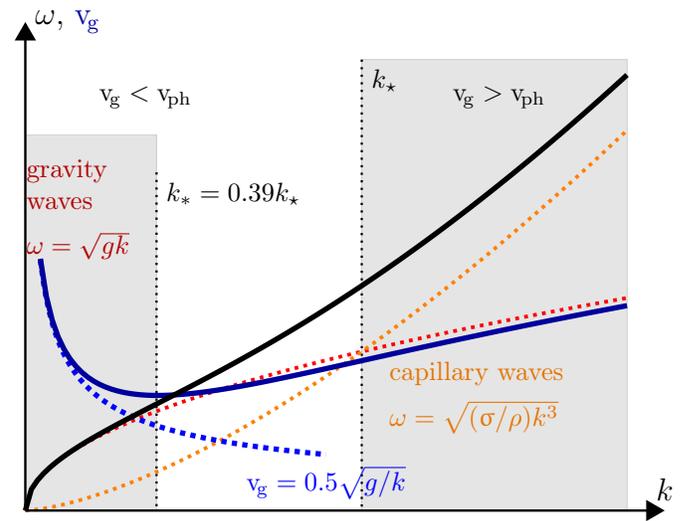


Рис. 7.2 Дисперсия гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде (7.10a), характерное волновое число  $k_*$  определено в (7.10b).

### 7-3.1 Глубокая вода, гравитационно-капиллярные волны.

Термин “глубокая вода” (*deep water*) соответствует пределу  $kd \gg 1$ . Тогда глубина жидкости не влияет на закон дисперсии волн:

$$\omega = \sqrt{(g + (\sigma/\rho)k^2)k}. \quad (7.10a)$$

Групповая скорость сравнивается с фазовой скоростью в точке

$$k_* = \sqrt{\rho g / \sigma}. \quad (7.10b)$$

Вследствие вида закона дисперсии (7.10a), касательная к дисперсионной кривой в точке  $\{k_*, \sqrt{2gk_*}\}$  проходит через начало координат.

Дисперсия групповой скорости  $dv_g/dk$  обращается в нуль в точке  $k_* \approx 0.39k_*$ , см. Рисунок 7.2. В этой точке групповая скорость достигает минимума

$$v_{g,min} \approx 1.1(\rho g^3 / \sigma)^{1/4}. \quad (7.10c)$$

Тело, плавающее на поверхности жидкости, которое движется со скоростью  $V$  меньшей, чем минимальная групповая скорость  $v_{g,min}$ , не излучает поверхностных волн.

**Гравитационные волны.** Область  $k < k_*$  называют областью гравитационных волн (*gravity surface waves*). В этой области поверхностное натяжение несущественно в законе дисперсии:

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad v_{ph} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}}. \quad (7.10d)$$

Групповая скорость гравитационных волн  $v_g$  растёт с ростом длины волны. Она всегда в 2 раза меньше фазовой скорости  $v_{ph}$ . Поэтому при обтекании тела на поверхности жидкости гравитационные волны излучаются вниз по потоку.

**Капиллярные волны.** Поверхностное натяжение становится существенным в законе дисперсии поверхностных волн при уменьшении длины волны. Волны с волновым числом  $k \ll k_*$  называют *капиллярными волнами* (*capillary waves*). Для воды коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma \approx 72 \text{ г/с}^2$ , так что характерный волновой вектор (7.10b)  $k_* \approx 3.7 \text{ см}^{-1}$ , что соответствует длине волны  $\lambda_* \approx 1.7 \text{ см}$ . Частота таких волн  $\omega_*/2\pi \approx 14 \text{ Гц}$ . В точке минимума групповой скорости  $\lambda_* \approx 4.3 \text{ см}$ ,  $\omega_*/2\pi \approx 6.5 \text{ Гц}$ .

Закон дисперсии в области капиллярных волн  $k \gg k_*$  есть

$$\omega = \sqrt{\sigma/\rho} k^{3/2}, \quad v_{ph} = \sqrt{\sigma k/\rho}, \quad v_g = \frac{3}{2} v_{ph}. \quad (7.10e)$$

Групповая скорость капиллярных волн больше фазовой. Это позволяет на глаз отличать капиллярные от гравитационных волн, для которых, наоборот, фазовая скорость больше групповой. При обтекании потоком тела капиллярные волны излучаются потому вверх по потоку. Капиллярные волны обыкновенно называют рябью.

### 7-3.2 Мелкая вода, гравитационные волны

При произвольной глубине чисто гравитационные волны, т.е. волны, для которых не существенно поверхностное натяжение, имеют дисперсию

$$\omega = \sqrt{gk \cdot \text{th}(kd)}. \quad (7.10f)$$

Термин “*мелкая вода*” (*shallow water*) означает предел, когда влияние конечной глубины на закон дисперсии волн существенно,  $kd \ll 1$ . В этом пределе закон дисперсии гравитационных волн оказывается линейным по волновому вектору,

$$\omega = \sqrt{gd} \cdot k, \quad \text{speed } c = \sqrt{gd}. \quad (7.10g)$$

В геофизике самые длинные гравитационные волны с длиной волны  $\lambda \sim 20 \text{ км}$  возбуждаются движением литосферных плит на дне океана во время землетрясений. При глубине океана  $d \sim 3000 \text{ км}$  безразмерный параметр  $kd \sim 1$ . Групповая скорость таких волн  $v_g \sim 150 \text{ м/с}$ .

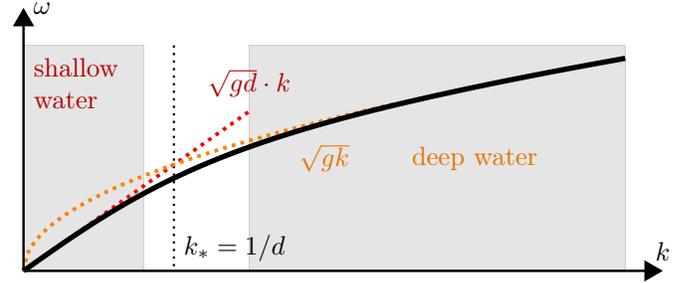


Рис. 7.3 Дисперсия гравитационных волн в жидкости с конечной глубиной (7.10f).

### 7-3.3 Задачи

• **Задача 1:** Из-за обрушения пород на отвесном берегу реки на поверхности воды была возбуждена группа гравитационных волн, распространяющихся от берега. Характерная длина волны оказалась равной  $\lambda = 1 \text{ м}$ . Через какое время после возбуждения волны достигнут противоположного берега, если ширина реки равна  $L = 50 \text{ м}$ ? Считайте, что влияние дна на распространение волн несущественно.

• **Задача 2:** Пусть в начальный момент времени огибающая плоского волнового пакета с узкой спектральной шириной в сопровождающей системе координат имела гауссову зависимость:  $\Phi(x, t = 0) = \exp(-x^2/2\xi^2)$ , где  $\xi/v_g$  — длительность импульса,  $v_g$  — групповая скорость. Найти дальнейшую эволюцию огибающей, если известна вторая дисперсия  $v_g' \equiv dv_g/dk$ . Построить на компьютере график огибающей (действительной и мнимой частей, желательно компьютерной программой для выявления всех характерных особенностей кривых) при  $t = 30\xi^2/|v_g'|$  в интервале  $x \in [-100\xi, 100\xi]$ .

• **Задача 3:** Определить линейный отклик (функцию Грина) жидкости со свободной поверхностью на внешний источник, представляющий собой малую аддитивную добавку  $f(t, \mathbf{r})$  к давлению на поверхности  $P$ , см. (7.9b).

*Решение:* Уравнения (4.3b, 4.3c) принимают вид

$$\begin{pmatrix} \partial_t & \partial_z \\ (\sigma/\rho)\Delta^\perp - g & \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f/\rho \end{pmatrix}. \quad (7.11a)$$

В Фурье-представлении  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ ,  $\Delta^\perp \rightarrow -k^2$ ,  $\partial_z \rightarrow k \text{ th}(kd)$ . При обращении матрицы возникает полюс, обход которого следует выбрать так, чтобы было выполнено условие причинности. Для этого следует добавить к

частоте бесконечно малую отрицательную мнимую поправку, сделав формальную замену  $\omega \rightarrow \omega + i0$ :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{f/\rho}{(\omega + i0)^2 - \omega_k^2} \begin{pmatrix} k \operatorname{th}(kd) \\ i\omega \end{pmatrix}. \quad (7.11b)$$

где закон дисперсии  $\omega_k$  задаётся уравнением (7.9h).

• **Задача 4:** Описать форму поверхности несжимаемой жидкости в пределе линейного отклика, если на поверхность действует внешняя сила  $(\rho/d)f$ , см. (7.9b, 7.11a, 7.11b). Область действия силы имеет размер  $a$  и равномерно движется вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $V > 0$ :

$$f = \exp\left(-\frac{x'^2 + y^2}{2a^2}\right), \quad x' = x - Vt.$$

Вода мелкая, её глубина равна  $d \ll a$ . Произвести сначала полуколичественные оценки, а затем вычислить свёртку функции Грина с источником на расстояниях от источника, значительно превышающих его размер. Рассмотреть случаи сверхзвукового  $V > c$  и дозвукового  $V < c$  движений,  $c = \sqrt{gd}$ .

*Решение:* Поскольку закон дисперсии волн на мелкой воде линеен, то математически задача эквивалентна задаче о распространении звуковых волн. Эта задача, правда для трёх-мерного случая, рассмотрена нами в Пункте 4-2.2. Качественные рассуждения для трёх-мерного случая, см. уравнения (7.11c-4.4d) остаются верными и для двумерного случая. Однако соотношение (4.4e) перестает быть верным: теперь амплитуда волны не убывает с расстоянием до источника, а остаётся постоянной. Схематическая картина расходящейся за источником волны изображена на Рисунке 4.1.

Источник  $f$  в Фурье-представлении имеет вид

$$f = (2\pi)^2 a^2 \delta(\omega - k_x V) \exp\left(-\frac{k^2 a^2}{2}\right),$$

сравни с выражением (4.4f). В этом выражении  $\delta$ -функция выражает собой эффект Доплера (7.11c). Вариация подъёма поверхности согласно (7.11b) в пределе  $kd \ll 1$  равна (измеряем расстояние в  $a$ , скорость — в  $c$ )

$$\begin{aligned} \eta &= \int \frac{k^2 \exp(-k^2/2 + i\mathbf{k}\mathbf{r} - iVtk_x) d^2k}{2\pi((Vk_x + i0)^2 - k^2)} = \\ &= \int \frac{k^2 \exp(-k^2/2 + ik_x x' + ik_y y) d^2k}{2\pi((Vk_x + i0)^2 - k^2)}. \end{aligned}$$

Полюса  $Vk_x = \pm k$  в этом выражении соответствуют направлениям распространения уходящих волн под углом Маха  $\theta_0$  (4.4d), поскольку на предыдущем шаге интегрирования благодаря  $\delta$ -функции мы получили соотношение  $\omega = k_x V$ .

• **Задача 5:** Описать линейный отклик несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на источник

$(\rho_0/c^2)f$  (аддитивная добавка к локальному давлению на поверхности, см. (7.9b)) размера  $a$ , равномерно движущийся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $V$ :

$$f = \exp\left(-\frac{x'^2 + y^2}{2a^2}\right), \quad x' = x - Vt.$$

Полагать, что скорость  $V$  значительно больше минимальной фазовой скорости  $v_{\text{ph}, \min}$  волн на поверхности. Глубина жидкости неограниченно большая.

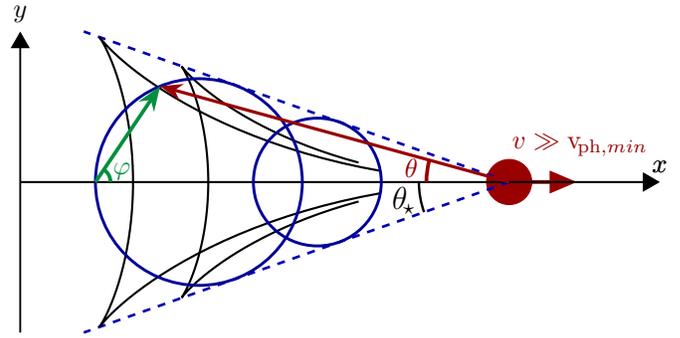


Рис. 7.4 След от источника, движущегося по поверхности глубокой воды со скоростью  $v \gg v_{\text{ph}, \min}$ .

*Решение:* Сперва дадим полу-количественную картину волнового движения. В системе отсчёта, связанной с движущимся источником, волновое поле является стационарным. В разных направлениях будут излучаться волны с разным волновым числом. Сейчас будем рассматривать только гравитационные волны, поскольку капиллярные волны в силу конечной вязкости будут быстро затухать при удалении от источника. Пусть излучаемая волна имеет волновое число по оси  $Oz$  равное  $k_x$  и частоту  $\omega$ . Согласно эффекту Доплера,

$$\omega = k_x V. \quad (7.11c)$$

В нашем изложении частота волны всегда положительна, поэтому  $k_x$  также положительна, то есть все волны распространяются по направлению движения источника. Пусть направление распространения волны составляет угол  $\varphi$  с направлением оси  $Ox$ , так что  $k_x = k \cos \varphi$  с  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ . С другой стороны, по закону дисперсии  $\omega = \sqrt{gk}$ . Поэтому групповая скорость волны

$$v_g = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} = \frac{V \cos \varphi}{2}.$$

Волновые пакеты, испущенные в разные стороны в один и тот же момент времени (когда источник находился в точке  $x = Vt - X$ , так что  $X/V$  есть время, которое прошло с момента испускания волны), имеют координаты

$$\begin{aligned} x' &= -X + v_g \cos \varphi \cdot \frac{X}{V} = -\frac{X(2 - \cos^2 \varphi)}{2}, \\ y &= v_g \sin \varphi \cdot \frac{X}{V} = \frac{X \cos \varphi \sin \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (7.11d)$$

Это есть уравнение круга радиуса  $X/4$  с центром в точке  $x' = -3X/4$ . Волновой пакет будет виден под углом  $\theta$  от источника, который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{-x'} = \frac{v_g \sin \varphi}{V - v_g \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2 - \cos^2 \varphi}.$$

Максимум этого выражения достигается при  $\cos \varphi = \sqrt{2/3}$ , то есть когда  $\theta = \theta_*$ ,  $\sin \theta_* = 1/3$  (численное значение  $\theta_* \approx 19.47^\circ$ ). Угол  $\theta_*$  называется углом Кельвина.

Найдём теперь форму гребней волн, поскольку именно гребни прежде всего видны невооружённым взглядом. Следует учитывать, что на разных своих участках гребень создаётся волновыми пакетами, испущенными в разные моменты времени и имеющие разные волновые векторы. Локально гребень ортогонален волновому вектору, направление которого, напомним, определяется углом  $\varphi$ . Поэтому координаты гребня  $\{x', y\}$  в системе отсчёта, связанной с движущимся источником, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx'} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (7.11e)$$

В этом уравнении следует считать  $X = X(\varphi)$ , решением с учётом выражения для координат волновых пакетов (7.11d) является  $X = X_0 \cos \varphi$ . Таким образом, координаты гребня задаются в параметрическом виде

$$x' = -\frac{X_0(2 - \cos^2 \varphi) \cos \varphi}{2}, \quad y = \frac{X_0 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{2}. \quad (7.11f)$$

### 7-3.3.1 Волны на различных границах раздела

• **Задача 6:** Пусть поверхность  $z = 0$  разделяет две жидкости с плотностями  $\rho_I$  (нижняя жидкость) и  $\rho_{II}$  (верхняя жидкость), см. обозначения Пункта 7-1.1.1. Считая, что обе жидкости идеальны, найдите закон дисперсии поверхностных волн (в случае, если плотности сравнимы,  $\rho_{II} \sim \rho_I$ , такие волны называют внутренними). Ускорение свободного падения равно  $g$ , поверхностное натяжение равно  $\sigma$ . Обе жидкости считать идеальными.

ными. В записи ответа используйте стандартное обозначение для числа Атвуда (*George Atwood*)

$$\operatorname{At} = \frac{\rho_I - \rho_{II}}{\rho_I + \rho_{II}}. \quad (7.12a)$$

Отрицательное число Атвуда  $\operatorname{At} < 0$  соответствует расположению более тяжёлой жидкости над более лёгкой. Найдите порог  $k_*$  по волновому числу, ниже которого возмущения поверхности являются неустойчивыми. Обе жидкости считать неограниченно глубокими.

• **Задача 7:** Пусть на границе раздела верхняя жидкость более плотная, чем нижняя,  $\rho_I < \rho_{II}$  в обозначениях Пункта 7-1.1.1. Жидкости, однако, заключены в замкнутый сосуд, совершающий быстрые вертикальные гармонические колебания с амплитудой  $a$  и циклической частотой  $\Omega$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ , поверхностное натяжение границы раздела равно  $\sigma$ . Определите порог  $k_{th}$  по волновому числу, ниже которого возмущения поверхности являются неустойчивыми. Считайте, что колебания являются высокочастотными, так что  $\Omega \gg \sqrt{-\operatorname{At} \cdot g k_*}$ , где характерное волновое число  $k_*^2 = g(\rho_{II} - \rho_I)/\sigma$  велико,  $k_* \gg k_{th}$ , а число Атвуда  $\operatorname{At}$  определено в (7.12a). Обе жидкости считайте идеальными.

• **Задача 8:** Рассмотрите волны на поверхности идеально проводящей жидкости, имеющей поверхностное натяжение  $\sigma$ , массовую плотность  $\rho$ , к которой приложено внешнее однородное стационарное вертикально направленное поле амплитуды  $E$ . Определите порог  $E_*$  по амплитуде электрического поля, после которого существуют нераспространяющиеся волновые пакеты. Установите порог  $E_{th}$  по амплитуде электрического поля, после которого поверхность становится неустойчивой. Нарисуйте дисперсионную кривую при электрическом поле  $E = 0.99 E_{th}$ . Жидкость имеет неограниченную глубину. *Указание:* К энергии (7.8a), в которой удержаны только квадратичные вклады по амплитуде волн, следует добавить электрическую часть потенциальной энергии (7.5c, 7.5i), после чего получить уравнение движения (7.8b).

## §7-4. Средние величины в линейных волнах

Каждая линейная волна в динамическом смысле представляет собой осциллятор, в котором энергия запасена в двух формах. Колебания сопровождаются перетеканием энергии из одной формы в другую, так что в среднем по времени (или по пространству) энергия оказывается равно распределена между этими резервуарами. Величина запасённой энергии квадратична по амплитуде волны. Кроме того, если волна бегущая, то с волной связан импульс (момент количества движения), также квадратичный по амплитуде. Определим эти ве-

личины для поверхностных волн на глубокой воде.

Поверхностная плотность энергии волны  $\mathcal{E}$  состоит

поровну из кинетической и потенциальной частей,

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{\rho}{2} \left\langle \int_{-d}^0 dz (\nabla\phi)^2 \right\rangle + \frac{\rho g}{2} \langle \eta^2 \rangle + \sigma \langle (\nabla\eta)^2 \rangle = \\ &= \frac{\rho}{4} \langle \partial_z(\phi^2) \rangle + \frac{\rho g + \sigma k^2}{2} \langle \eta^2 \rangle = \frac{\rho\omega^2 H^2 \operatorname{cth}(kd)}{2k}.\end{aligned}\quad (7.13a)$$

При вычислении мы учли условие непротекания на дне, не более чем квадратичные вклады по амплитуде волны и связь (7.9i) между потенциалом и формой поверхности. Угловые скобки означают усреднение по периоду колебания волны. В пределе глубокой воды глубина проникновения волнового движения  $1/k$  может быть оценена из сходимости по вертикали объёмного интеграла от кинетической энергии течения.

Теперь вычислим импульс бегущей волны. Обратим внимание, что если выбрать точку в пространстве, которая всегда находится под водой, то среднее  $\langle v^\alpha \rangle = 0$ , так что в этой точке средняя плотность импульса равна нулю. Значит, плотность потока массы, она же плотность импульса  $\pi^\alpha$ , сосредоточена во впадинно-гребневом слое, то есть в области  $|z| < |H|$ :

$$\begin{aligned}\pi^\alpha &= \rho \left\langle \int_{-d}^\eta dz v^\alpha \right\rangle = \rho \left\langle \int_0^\eta dz v^\alpha \right\rangle = \\ &= \rho \langle \eta v^\alpha \rangle_t = \frac{\rho\omega H^2 \operatorname{cth}(kd)}{2} \frac{k^\alpha}{k}.\end{aligned}\quad (7.13b)$$

Импульс и энергия переносятся с групповой скоростью. Для демонстрации этого построим потоки соответствующих величин. Поверхностная плотность потока энергии  $\mathcal{J}_\varepsilon^\alpha$ , есть сумма двух вкладов: объёмного, являющегося выражением (2.7j), проинтегрированным по вертикали, и поверхностного, являющегося результатом переноса поверхностной энергии, связанной с поверхностным натяжением. В объёмном вкладе отдельно выделяется поток внутренней энергии, который связан с потоком массы  $\pi^\alpha$ ; этот поток не связан с энергией колебаний, поэтому его следует далее отбросить. Удерживая вклады, имеющие не более чем второй порядок по амплитуде волны, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon^\alpha &= \cancel{(\rho E + P_{\text{atm}}) \frac{\pi^\alpha}{\rho}} + \int_{-d}^0 dz \langle v^\alpha P \rangle + \sigma \langle \eta \partial_z v^\alpha |_{z=0} \rangle = \\ &= \mathcal{E} v_g \frac{k^\alpha}{k},\end{aligned}\quad (7.13c)$$

где  $\mathcal{E}$  — удельная плотность внутренней энергии, а  $P_{\text{atm}}$  — давление над поверхностью жидкости. Таким образом, энергия  $\mathcal{E}$  (7.13a), связанная с волновыми колебаниями, переносится с групповой скоростью  $v_g$  (7.10d).

Поверхностная плотность потока импульса (вычисления приведены только в пределе жидкости неограниченной глубины) есть

$$\begin{aligned}\pi^{\alpha\beta} &= \left\langle \int_{-d}^\eta (\rho v^\alpha v^\beta + P \delta^{\alpha\beta}) dz + \int_{-d}^0 \rho g z \delta^{\alpha\beta} dz \right\rangle - \\ &= \sigma \left\langle \sqrt{1 + (\nabla\eta)^2} \delta_\perp^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta} \right\rangle\end{aligned}\quad (7.13d)$$

где слагаемое с поверхностным натяжением есть проинтегрированный по вертикали поток импульса на границе раздела, см. (7.4a). В полном выражении мы вычли постоянные слагаемые, не зависящие от амплитуды волны. Воспользуемся уравнением Бернулли (7.7f) и граничным условием (7.9b) для давления  $P$  для того, чтобы выразить вклад второго порядка по амплитуде волн в давление через скорость:

$$P = -\rho g z + \partial_t \phi + \frac{\rho v^2}{2} = \rho g(\eta - z) - \sigma \Delta^\perp \eta + \frac{\rho v^2}{2}.\quad (7.13e)$$

В результате

$$\begin{aligned}\pi^{\alpha\beta} &= \frac{\rho}{2} \int_{-d}^0 dz \langle 2v^\alpha v^\beta - v^2 \delta^{\alpha\beta} \rangle + \left\langle \frac{\rho g \eta^2}{2} - \sigma \eta \Delta^\perp \eta \right\rangle \delta^{\alpha\beta} - \\ &+ \sigma \left\langle \partial_\alpha \eta \partial_\beta \eta - ((\nabla\eta)^2/2) \delta^{\alpha\beta} \right\rangle.\end{aligned}\quad (7.13f)$$

Нетрудно видеть, что общий коэффициент при  $\delta^{\alpha\beta}$  пропорционален разности средних потенциальной и кинетической энергий, то есть равен нулю. Окончательные вычисления приводят к

$$\begin{aligned}\pi^{\alpha\beta} &= \frac{\rho\omega H^2}{2} \frac{kd\omega^2 / \operatorname{sh}^2(kd) + g + 3(\sigma/\rho)k^2}{2\omega} \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} = \\ &= \pi^\alpha v_g \frac{k^\beta}{k},\end{aligned}\quad (7.13g)$$

Как и поток энергии (7.13c), поток импульса (7.13g) в плоской волне есть плотность переносимой величины — в данном случае импульса  $\pi^\alpha$  (7.13b), — домноженный на групповую скорость  $v_g$  (7.10d).

### 7-4.1 Дрейф Стокса

Когда мы сделали утверждение о том, что поверхностная плотность импульса в волне сосредоточена во впадинно-гребневом слое, мы рассуждали в эйлеровом представлении: мы зафиксировали точку в пространстве и рассчитали в ней среднюю плотность импульса. Однако имеет смысл задать вопрос и по-другому: каков средний по времени импульс элемента жидкости, который в среднем по времени остаётся на глубине  $-z$  под поверхностью? В этом случае говорят, что мы производим рассмотрение в лагранжевом представлении.

В линейном приближении по амплитуде волны каждая лагранжева частица совершает во времени колебательное движение. Её смещение  $\mathbf{s}(t, \mathbf{r})$  есть проинтегри-

рованная по времени скорость  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ , взятая в фиксированной точке пространства  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{s}(t, \mathbf{r}) = \int^t dt' \mathbf{u}(t', \mathbf{r}). \quad (7.14a)$$

В линейном по амплитуде волны порядке лагранжева частица в среднем не смещается относительно своего исходного положения. Для плоской волны траектория  $\mathbf{s}(t)$  проходит по кругу радиуса  $H \exp(kz)$  с постоянной скоростью  $\omega H \exp(kz)$ .

В квадратичном по амплитуде полны порядке это уже не так: лагранжева частица в среднем смещается. Например, для плоской монохроматической бегущей волны каждая лагранжева частица совершает почти замкнутое круговое движение, за каждый период смещаясь на величину, малую по сравнению с амплитудой колебаний. Средняя по времени скорость этого смещения есть средняя лагранжева скорость движения частиц в поле волны и называется дрейфом Стокса. Физически дрейф Стокса связан с наличием у волны импульса, см. (7.13b).

Определим скорость дрейфа Стокса  $\mathbf{U}_s(\mathbf{r})$ . Эту скорость надо рассматривать как результат усреднения по периоду колебания волны. Нам надо учесть, что скорость лагранжевой частицы надо вычислять не в фиксированной точке пространства, а учесть смещение (7.14a) в линейном порядке:

$$U_s^i = \langle (\mathbf{s} \nabla) u^i \rangle_t. \quad (7.14b)$$

Используя условие несжимаемости (7.7c), можно произвести следующие выкладки:

$$\begin{aligned} U_s^i &= \partial_l \langle s^l v^i \rangle_t = \epsilon_{ilk} \partial_l \Psi_s^k, & (7.14c) \\ \langle s^i v^k \rangle_t &= -\langle s^k v^i \rangle_t = -\epsilon_{ikl} \Psi_s^l, \\ \Psi_s^i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \langle v^k s^l \rangle_t \quad \partial_i \Psi_s^i = 0. \end{aligned}$$

Для плоской бегущей гравитационной волны  $\langle s^\alpha u^\beta \rangle_t = 0$ . Поэтому дрейф Стокса

$$U_s^\alpha = \langle \partial_i (s^i u^\alpha) \rangle_t = \langle \partial_z (s^z u^\alpha) \rangle_t = \rho \omega H^2 k_\alpha e^{2kz}. \quad (7.14d)$$

## §7-5. Нелинейные эффекты в распространении волн

Рассмотрим идеальную жидкость, глубина которой равна  $d$ . Будем полагать, что на её поверхности возбуждены плоская гравитационная волна, распространяющаяся в  $x$ -направлении. Волна монохроматична или квази-монохроматична, имея несущий волновой вектор, равный  $k$ , и, соответственно, несущую частоту  $\omega$ , определяющуюся законом дисперсии (7.9h) с нулевым поверхностным натяжением.

Выясним, к каким эффектам приводит слабая нелинейность в такой волне. Для монохроматичной волны на

Если проинтегрировать скорость дрейфа Стокса в плоской волне по вертикали, то мы получим поверхностную плотность потока массы в волне (7.13b):

$$\rho \int_{-\infty}^0 dz U_s^\alpha = \pi^\alpha. \quad (7.14e)$$

В общем случае, для произвольного волнового движения, состоящего из волн, распространяющихся в разных направлениях, прямое обобщение (7.14e) оказывается неверным. Дело в том, что в течении общего вида лагранжевы траектории совершают двумерное движение в проекции на горизонтальную плоскость. отсюда возникает различие, аналогичное различию между экспоненциальным распределением дрейфа по высоте Стокса и локализацией потока импульса в гребнево-впадинном слое в плоской волне. Поэтому правильное обобщение (7.14e) должно содержать, скажем в правой части, выражение типа  $\epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta \Psi$ , где  $\Psi$  некоторая эффективная функция тока.

### 7-4.2 Задачи

• **Задача 1:** Покажите, пользуясь уравнениями движения, что для произвольной системы гравитационных волн на глубокой воде, распространяющихся в произвольных направлениях, вертикальная компонента скорости дрейфа Стокса всегда равна нулю.

• **Задача 2:** Определите Стоксов дрейф, производимый двумя скрещенными стоячими гравитационными волнами на глубокой воде, описываемыми формой поверхности

$$\eta = H_x \cos(kx) \cos(\omega t) + H_y \cos(ky) \cos(\omega t + \psi),$$

где  $\omega = \sqrt{gk}$ ,  $H_{x,y}$  — амплитуды волн, а  $\psi$  — фиксированная разность фаз волн.

глубокой воде мы получим изменение формы пространственных колебаний поверхности и нелинейный сдвиг частоты. Ненулевая дисперсия гравитационных волн приводит к тому, что уравнение, описывающее распространение слабо немонохроматичной волны, есть нелинейное уравнение Шредингера. Нелинейная поправка к частоте монохроматической волны позволяет определить знак и величину коэффициента перед нелинейным членом в нелинейном уравнении Шредингера.

Для квази-монохроматической волны на жидкости

конечной глубины, характеризующуюся узким спектром с шириной  $\Delta k \ll k$ , мы определим медленное изменение формы поверхности  $\bar{\eta}$ , которое квадратично по амплитуде волны, и происходит со скоростью  $\Delta\omega = v_g \Delta k$  (групповая скорость  $v_g$  характеризует скорость распространения волновых пакетов). С этим изменением формы поверхности связаны медленные же течения, имеющие по горизонтали характерный масштаб  $1/\Delta k$ .

Влияние слабой нелинейности будем учитывать путём теории возмущений. В линейном (первом) приближении динамика волны подчиняется линеаризованному волновому уравнению (7.9g)

$$\partial_t \eta^{(1)} = -\hat{\partial}_z \phi^{(1)}, \quad \partial_t \phi^{(1)} = g\eta^{(1)}, \quad (\partial_t^2 + g\hat{\partial}_z)\eta^{(1)} = 0. \quad (7.16)$$

Предполагается, что в равенстве (7.16) потенциал  $\phi$  и его производные берутся при  $z = 0$ . Напомним, что результат действия оператора  $\hat{\partial}_z$  на  $\phi|_{z=0}$  определён в (7.9f). Нелинейные члены в уравнениях движения приведут к тому, что в волне появятся кратные гармоники. В общем случае форму поверхности и потенциал можно записать в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \bar{\eta} + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots, \\ \phi &= \bar{\phi} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (7.17)$$

Получим уравнения, определяющие первые нелинейные поправки — нулевую и вторую гармоники. Граничные условия (7.7g, 7.7h), записанные во втором порядке по амплитуде волны, приобретают вид

$$\begin{aligned} g\eta^{(0+2)} - \partial_t \phi^{(0+2)} &= \eta^{(1)} \partial_{zt} \phi^{(1)} - \frac{(\nabla \phi^{(1)})^2}{2}, \\ \partial_t \eta^{(0+2)} + \hat{\partial}_z \phi^{(0+2)} &= \partial_x \phi^{(1)} \partial_x \eta^{(1)} - \eta^{(1)} \partial_z^2 \phi^{(1)}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где после выполнения дифференцирования потенциал  $\phi$  должен браться при  $z = 0$ , а обозначения  $\phi^{(0+2)} = \bar{\phi} + \phi^{(2)}$  и  $\eta^{(0+2)} = \bar{\eta} + \eta^{(2)}$ .

### 7-5.1 Медленные течения, вызванные движениями волновых пакетов

Пусть жидкости имеет конечную глубину  $d$ . Пусть плоская волна в линейном приближении является слабо монохроматичной. Это означает, что форма поверхности  $\eta^{(1)}$  в (7.16) представима в виде

$$\eta^{(1)} = \text{Re} (H \exp(i\chi)), \quad (7.19a)$$

где  $H(t, x)$  — комплексная огибающая, а  $\chi = ikx - i\omega t$  есть фаза несущей волны. Спектральная ширина  $\Delta k$  огибающей  $H$  мала по сравнению с несущим волновым числом,  $\Delta k \ll k$ ; по этому параметру мы будем строить последовательные приближения. Перепишем выражение (7.9i) для потенциала

$$\phi^{(1)} = \text{Re} \left( \frac{i\hat{\omega} \text{ch}(\hat{k}_x(z+d))}{\hat{k}_x \text{sh}(\hat{k}_x d)} H \exp(i\chi) \right), \quad (7.19b)$$

где  $\hat{\omega}$  и  $\hat{k}_x$  следует воспринимать как дифференциальные операторы, действующие во временном  $t$ -пространстве и координатном  $x$ -пространстве соответственно,  $\hat{\omega} = i\partial_t$  и  $\hat{k}_x = -i\partial_x$ . В линейном приближении амплитуда волны  $\eta^{(1)}$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\partial_t^2 \eta^{(1)} + \hat{\omega}_{k_x}^2 \eta^{(1)} = 0, \quad \omega_{k_x}^2 = g\hat{k}_x \text{th}(\hat{k}_x d). \quad (7.19c)$$

В нулевом порядке по спектральной ширине уравнение (7.19c) приводит к дисперсионному соотношению  $\omega^2 = gk$ . В следующем приближении получаем уравнение на огибающую:

$$(\partial_t + v_g \partial_x) H = 0. \quad (7.19d)$$

Перейдём теперь к вычислению нелинейных эффектов. Произведём усреднение правых частей (7.18) по быстрым волновым осцилляциям. Сначала выпишем выражения для комплексных амплитуд производных, присутствующих в правых частях (7.18):

$$\begin{aligned} \partial_x \phi^{(1)} &= -\hat{\omega} \text{cth}(\hat{k}_x d) H e^{i\chi}, & \partial_z \phi^{(1)} &= i\hat{\omega} H e^{i\chi}, \\ \partial_{zt} \phi^{(1)} &= \hat{\omega}^2 H e^{i\chi}, & \partial_x \eta^{(1)} &= i\hat{k}_x H e^{i\chi}, \\ \partial_z^2 \phi^{(1)} &= i\hat{\omega} \hat{k}_x \text{cth}(\hat{k}_x d) H e^{i\chi}, \end{aligned} \quad (7.19e)$$

Если в правую часть первого уравнения в (7.19e) посчитать в главном приближении по коротко-волновому приближению, т.е. заменить  $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ ,  $\hat{k}_x \rightarrow k_x$ , то мы получим

$$f_\eta = -\frac{\omega^2 |H^2|}{4 \text{sh}^2(kd)} = -\frac{gk |H^2|}{2 \text{sh}(2kd)}. \quad (7.19f)$$

Это выражение стремится к нулю на глубокой воде. В правой же части второго уравнения в (7.19e) в том же приближении мы получим нуль. В первом уравнении (7.18), однако, для предела монохроматической волны остаётся неопределённость, связанная с произвольностью выбора уровня  $z = 0$ . Математически это означает, что в потенциале  $\phi$  может быть произвольная добавка, однородная в пространстве (т.е. не изменяющая распределение скорости в пространстве) и линейно растущая со временем (т.е. изменяющая давление согласно уравнению Бернулли). Мы эту добавку представим в виде

$$\phi = \omega^2 |H^2| C_\phi t + \dots, \quad (7.19g)$$

где  $C_\phi$  — безразмерная величина, зависящая от безразмерной глубины  $kd$ . Она приобретает физический смысл, только если рассматривать волновые пакеты конечной длины. В этом случае есть возможность сравнить уровень жидкости в присутствии и отсутствии волнового движения.

Поэтому перейдём к вычислениям правых частей (7.18) для слабо немонахроматичной волны. Будем удерживать только не более чем линейные по ширине пакета вклады. Тогда к выражению (7.19f) поправок не будет (существующие поправки более высокого порядка). Правая часть во втором уравнении (7.18) имеет вид

$$f_\phi = -\frac{\omega \operatorname{cth}(kd)}{2} \partial_x |H^2|. \quad (7.19h)$$

Уравнение на медленную часть потенциала есть

$$\begin{aligned} (g\hat{\partial}_z + \partial_t^2)\bar{\phi} &= gf_\phi - \partial_t f_\eta = -g\omega\tilde{C}\partial_x |H^2|, \\ \tilde{C} &= \frac{\operatorname{sh}(4kd) + 3\operatorname{sh}(2kd) + 2kd}{4\operatorname{sh}^2(2kd)}. \end{aligned} \quad (7.19i)$$

Преобразуя правую часть, мы воспользовались уравнением на огибающую (7.19d). Числовая величина  $\tilde{C}$  изменяется не сильно: в пределе глубокой воды  $\tilde{C} = 1/2$ , в пределе мелкой воды она возрастает до  $\tilde{C} = 3/2$ . Отметим, что правая часть (7.19i) может быть получена как предел в бигармонической волне выражения [Chen, 2006, Eq. (11b)] при совпадающих частотах.

Чтобы избежать громоздких вычислений для случая общего положения, обращать волновой оператор, стоящий в левой части уравнения (7.19i), будем в двух пределах соотношения между собой глубины  $d$  и ширины пакета  $1/\Delta k$ . Поскольку предполагается, что медленные течения далеки от волнового резонанса (число Урселла относительно мало, смотри ниже Пункт 7-5.2), то медленные поля  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\phi}$ , не обладая собственно динамикой, являются вынужденными и поэтому зависят также от координаты и времени только посредством комбинации  $x - v_g t$ .

Сперва рассмотрим предел очень глубокой жидкости, когда  $\Delta k \cdot d \gg 1$ . Тогда с точки зрения несущей волны, мы имеем дело с глубокой водой. В этих условиях  $\partial_t^2 \bar{\phi} \ll g\partial_z \bar{\phi}$ , так что

$$\bar{\phi} = -\frac{\omega}{2} \frac{1}{k} \partial_x |H^2|. \quad (7.19j)$$

Интересующая нас величина

$$\partial_t \bar{\phi} = -\frac{1}{v_g} \partial_x \bar{\phi} = -\frac{g}{4} \hat{k} |H^2| \sim \frac{\omega H_0^2}{2} \Delta\omega. \quad (7.19k)$$

Константа  $C$  в (7.19g) мала по спектральной ширине пакета, но её вклад может быть всё же определяющим на фоне второго, экспоненциально малого вклада от (7.19f). Среднее смещение поверхности жидкости

$$\bar{\eta} = \frac{\partial_t \bar{\phi} + f_\eta}{g} = -\left( \frac{\hat{k}}{4} + \frac{k}{2\operatorname{sh}(2kd)} \right) |H^2|. \quad (7.19l)$$

Построим качественную картину, позволяющую получить эти результаты более простым, общезначимым способом. Будем рассматривать предел неограниченно

глубокой жидкости, тогда второе слагаемое в (7.19l) пренебрежимо мало. Сделаем предположение, которое оправдывается дальнейшими выводами: смещение среднего уровня жидкости не определяется средней вертикальной скоростью  $\bar{v}^z$  у поверхности, поскольку  $\partial_t \bar{\eta}$  мало по сравнению с  $\bar{v}^z$  как  $\Delta k/k$ . Значит, вертикальная средняя скорость должна быть результатом изменения по координате потока массы  $\pi^x$  (7.13b):

$$\bar{v}^z = -\partial_z \bar{\phi} = -\hat{k} \bar{\phi} = \frac{1}{\rho} \partial_x \pi^x = -\frac{\omega}{2} \partial_x |H^2|. \quad (7.19m)$$

Это равенство, действительно, выполняется согласно нашим точным вычислениям. Чтобы найти среднее смещение  $\bar{\eta}$  уровня жидкости, воспользуемся гидростатическим приближением: изменение среднего по времени давления под жидкостью вблизи её поверхности связано с изменением высота столба жидкости,  $\delta \bar{P} = g\bar{\eta}$ . Из уравнения Бернулли (7.7f) получаем, что  $\delta \bar{P} = \partial_t \bar{\phi}$ . Величина  $\partial_t \bar{\phi}$  может быть найдена из уравнения (7.19m), используя то, что волновой пакет движется с групповой скоростью, см. (7.19d). В результате чего приходим к (7.19l).

Пусть теперь, наоборот, длина волнового пакета велика по сравнению с глубиной жидкости,  $\Delta k \cdot d \ll 1$ . Уравнение (7.19i) может быть переписано в виде

$$(g\hat{\partial}_z + \partial_t^2)\bar{\phi} = -\left( \frac{gd}{v_g^2} - 1 \right) \partial_t^2 \bar{\phi} = \frac{g\omega\tilde{C}}{v_g} \partial_t |H^2|.$$

Нужная нам величина есть потому

$$\partial_t \bar{\phi} = -\frac{g\omega\tilde{C}}{v_g(gd/v_g^2 - 1)} |H^2|.$$

Таким образом, средний уровень поверхности

$$\bar{\eta} = -\left( \frac{\omega\tilde{C}}{v_g(gd/v_g^2 - 1)} + \frac{k}{2\operatorname{sh}(2kd)} \right) |H^2|, \quad (7.19n)$$

что совпадает с [Longuet-Higgins & Stewart, 1962, Eq. (3.17)]. Второй вклад в (7.19n) оказывается существенным только в переходной области длины волны  $kd \sim 1$ .

## 7-5.2 Граница применимости приближения слабо нелинейных волн

Рассмотрим противоположный предел мелкой воды. Волны на мелкой воде отличаются от волн на глубокой тем, что они имеют почти линейный закон дисперсии, см. (7.10g). Система уравнений на вторую гармонику (7.18) остаётся вместе с тем прежней. В случае совершенно линейного закона дисперсии вынуждающая сила на удвоенном волновом векторе  $2k$ , действующая с удвоенной частотой  $2\omega$  в (7.18), является резонансной. Это означает, что амплитуда второй гармоники оказывается не малой по сравнению с амплитудой основной, первой гармоники. В этом случае в определении влияния нелинейности на динамику волн мы не можем использовать теорию возмущений, развитую выше.

Определим критерий, при котором амплитуда второй гармоники остаётся относительно малой. Для этого учтём отклонение от линейного закона дисперсии для волн на мелкой воде (7.10f), разложив его по малому параметру  $kd \ll 1$  до следующего не исчезающего члена:

$$\omega_k = \left(1 - \frac{(kd)^2}{6}\right) ck. \quad (7.20a)$$

Детерминант матрицы коэффициентов линейной системы уравнений (7.18) относительно  $\{\eta^{(2)}, \phi^{(2)}\}$  равен

$$\det = (2\omega_k)^2 - (\omega_{2k})^2 \approx (kd)^2 \omega^2. \quad (7.20b)$$

Правая часть (вынуждающая сила) оценивается как

$$\eta^{(1)} \partial_z^2 \phi^{(1)} \sim \frac{\omega H^2}{d} \equiv f \quad (7.20c)$$

согласно (7.9i). Таким образом, оценка для амплитуды второй гармоники есть

$$\eta^{(2)} \sim \frac{\omega}{\det} \cdot f = \frac{H}{d^3 k^2} \cdot H. \quad (7.20d)$$

Отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде первой по порядку величины есть

$$\frac{\eta^{(2)}}{H} \sim \mathcal{U} \equiv \frac{H \lambda^2}{d^3}. \quad (7.20e)$$

Число  $\mathcal{U}$  называется *числом (номером) Урселла (Ursell parameter or Stokes parameter)*. Если  $\mathcal{U} \lesssim (2\pi)^2$ , то хорошо применима теория разложения Стокса, первый шаг которой есть уравнение (7.18).

### 7-5.3 Плоская периодическая слабо нелинейная гравитационная волна на глубокой воде

Исследуем влияние нелинейных поправок на динамику плоской монохроматической гравитационной волны на глубокой воде. Эту процедуру впервые провёл Г.Стокс [Stokes, 1847]. В современном изложении эту теорию можно найти в [Zhao & Liu, 2022].

В линейном (первом) приближении волна описывается формой поверхности и потенциалом течения

$$\eta^{(1)} = H \cos \varphi, \quad \phi^{(1)} = -\frac{\omega_0 H}{k} e^{kz} \sin \varphi, \quad \varphi = kx - \omega_0 t, \quad (7.21a)$$

где невозмущённая нелинейностью частота волны  $\omega_0 = \sqrt{gk}$  (7.10d). Нелинейные поправки (7.17) являются монохроматическими,

$$\eta^{(n)} \propto \cos(n\varphi + \alpha_{\eta n}) \quad (7.21b)$$

$$\phi^{(n)} \propto \sin(n\varphi + \alpha_{\phi n}) e^{nkz}$$

где  $\alpha_{\eta n}$  и  $\alpha_{\phi n}$  неизвестные фазы. Для определённости мы будем считать, что у волны задано волновое число

$k$ , а частота  $\omega$  подлежит нахождению; также  $H$  и фаза в выражении для главной, т.е. первой, гармоники  $\phi^{(1)}$  формы поверхности в (7.21a) являются фиксированными.

Подстановка в правые части (7.18) вида плоской волны (7.21a) приводит к

$$g\eta^{(2)} - \partial_t \phi^{(2)} = \frac{(\omega H)^2}{2} \cos(2\varphi), \quad (7.21c)$$

$$\partial_t \eta^{(2)} + 2k\phi^{(2)} = \omega k H^2 \sin(2\varphi).$$

Решением этой системы уравнений является

$$\eta^{(2)} = \frac{(kH)H}{2} \cos(2\varphi), \quad \phi^{(2)} = 0. \quad (7.21d)$$

Обратим внимание, что в правых частях (7.21c), являющихся вынуждающей силой, присутствует только вторая гармоника. Дело в том, что, как мы раньше выяснили, для плоской волны на неограниченно глубокой жидкости  $\bar{\eta} = 0$  (7.19l) и  $\bar{\phi} = 0$  (7.19k). Ещё одной особенностью обладает решение (7.21d): поправка к потенциалу течения равна нулю.

Теперь произведём следующий шаг разложения, который будет содержать 1-ю и 3-ю гармоники. При этом нам надо учесть, что частота имеет поправку  $\omega^{(2)}$ , относительная величина которой порядка  $(kH)^2$ . Выписываем только правые части уравнений, аналогичных (7.18):

$$\begin{aligned} \dots^{(1+3)} &= \frac{(\eta^{(1)})^2}{2} \partial_{zzt} \phi^{(1)} + \eta^{(2)} \partial_{zt} \phi^{(1)} + \\ &+ \eta^{(1)} (\nabla \phi^{(1)} \cdot \nabla \partial_z \phi^{(1)}) = \end{aligned} \quad (7.21e)$$

$$= -\frac{3g(kH)^2 k}{8} \cos \varphi + \frac{3g(kH)^2 k}{8} \cos(3\varphi),$$

$$\begin{aligned} \dots^{(1+3)} &= \partial_x \phi^{(1)} \partial_x \eta^{(2)} + \eta^{(1)} \partial_{xz} \phi^{(1)} \partial_x \eta^{(1)} - \\ &- \eta^{(2)} \partial_z^3 \phi^{(1)} - \frac{(\eta^{(1)})^2}{2} \partial_z^2 \phi^{(1)} = \end{aligned} \quad (7.21f)$$

$$= \frac{5\omega_0 (kH)^2 H}{8} \sin \varphi + \frac{9\omega_0 (kH)^2 H}{8} \sin \varphi.$$

Отдельно выписывая уравнение на третью гармонику, которое полностью аналогично (7.18), находим, что

$$\eta^{(3)} = \frac{3(kH)^2 H}{8} \cos(3\varphi), \quad \phi^{(3)} = 0. \quad (7.21g)$$

Теперь выделим уравнение на главную, т.е. первую, гармонику. При этом мы полагаем, что выражение (7.21a) для  $\eta^{(1)}$  остаётся неизменным по определению, а поправка испытывает  $\phi^{(1)}$ ; по-прежнему, однако,  $\partial_z \phi^{(1)} = k\phi^{(1)}$ . В результате

$$gH \cos \varphi - \partial_t \phi^{(1)} = -\frac{3g(kH)^2 H}{8} \cos \varphi, \quad (7.21h)$$

$$H\omega \sin \varphi + k\phi^{(1)} = \frac{5\omega_0 (kH)^2 H}{8} \sin \varphi. \quad (7.21i)$$

Получаем, что частота с учётом нелинейного сдвига равна

$$\omega = \omega_0 + \omega_2 = \left(1 + \frac{(kH)^2}{2}\right) \omega_0, \quad (7.21j)$$

а потенциал течения

$$\phi^{(1)} = - \left(1 - \frac{(kH)^2}{8}\right) \frac{\omega_0 H}{k} \sin \varphi e^{kz}. \quad (7.21k)$$

### 7-5.3.1 Форма поверхности

Соберём полученные результаты для формы поверхности в одно выражение:

$$\eta = H \cos \varphi + \frac{(kH)H}{2} \cos(2\varphi) + \frac{3(kH)^2 k}{8} \cos(3\varphi). \quad (7.21l)$$

Отметим, что благодаря вкладу третьей гармоники  $\eta^{(3)}$  разница между горбом и впадиной равна не  $2H$ , а несколько больше —  $2\tilde{H}$ , с полу-высотой

$$\tilde{H} = \left(1 + \frac{3(kH)^2}{8}\right) H. \quad (7.21m)$$

Вклад второй гармоники  $\eta^{(2)}$  качественно приводит к тому, что горбы становятся уже и выше, а впадины — мельче и шире. В потенциале течения содержит только первая гармоника (7.21k) (в следующем порядке  $\sim (kH)^3$  в потенциале возникнет вторая гармоника). Частота волны задаётся выражением (7.21j).

## 7-5.4 Распространение волнового пакета

Для того, чтобы нелинейный сдвиг частоты задавался выражением (7.21j), волновое уравнение (7.16) на слабо немонохроматичную волну надо дополнить нелинейным членом:

$$\left(\partial_t^2 + gk + \frac{4gk^3}{3}\eta^2\right)\eta = 0, \quad (7.21n)$$

где предполагается, что должны быть удержаны только вклады, осциллирующие как  $\exp(\pm i\varphi)$ . Введём для поля волны  $\eta$  комплексную огибающую  $\Phi$ ,

$$\eta(t, x) = \text{Re} \left( \Phi(t, x) \exp(ik_0 x - i\omega_0 t) \right). \quad (7.21o)$$

В терминах огибающей  $\Phi$  уравнение (7.21n) переходит в фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера

$$i\partial_t \Phi = \frac{\omega_0}{8k_0^2} \partial_x^2 \Phi + \omega_0 k_0^2 |\Phi|^2 \Phi, \quad (7.21p)$$

сравни с (13.8g) в Приложении; напомним, что (7.21p) записана в сопровождающей системе координат, движущейся со скоростью  $v_g$ . Непосредственной проверкой можно убедиться, что нелинейный сдвиг частоты (13.8p) совпадает с найденным (7.21j).

Поправки следующего порядка по спектральной ширине пакета к нелинейному уравнению Шредингера рассмотрены в [Dysthe, 1979].

## 7-5.5 Гамильтониан слабо нелинейных волн

Гамильтониан (7.8d) может быть разложен в ряд по  $\psi, \eta$ . Это разложение начинается с квадратичных членов,

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \int dx dy (\psi \hat{\partial}_z \psi + g\eta^2). \quad (7.22a)$$

Оператор  $\hat{\partial}_z$  является функцией симметричного оператора  $\hat{k}$ , поэтому и сам является симметричным. Если в уравнениях движения вместо полного гамильтониана взять его квадратичную часть  $\mathcal{H}^{(2)}$ , то мы получим линейную динамику волн:

$$\partial_t \eta = -\hat{\partial}_z \psi, \quad \partial_t \psi = g\eta. \quad (7.22b)$$

Нелинейное взаимодействие волн описывается кубичным  $\mathcal{H}^{(3)}$  и более высокими вкладами в гамильтониан. Все эти вклады происходят из разложения кинетической части энергии и являются квадратичными по  $\psi$ , т.е. вычисление этих вкладов сводится к задаче разложения оператора  $\hat{G}$  по степеням формы поверхности  $\eta$ . Кубичный вклад в гамильтониан (глубокая вода, для которой  $\hat{\partial}_z = \hat{k}$ ) равен

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(3)} &= \frac{1}{2} \int dx dy \psi (-k(\eta k \psi) - \partial_\alpha (\eta \partial_\alpha \psi)) = \\ &= \frac{1}{2} \int dx dy \eta (\partial_\alpha \psi \partial_\alpha \psi - (k\psi)^2). \end{aligned} \quad (7.22c)$$

В первой форме записи не проводилось ни одного интегрирования по частям, при этом видно, что линейный по  $\eta$  вклад в  $\hat{G}$  действительно симметричный.

## 7-5.6 Задачи

• **Задача 1:** Покажите, что уравнения движения (7.8b), полученные вариацией гамильтониана  $\mathcal{H}^{(2)} + \mathcal{H}^{(3)}$ , записанного в точности до кубических членов, см. (7.22a, 7.22c), эквивалентны (если течение происходит только в плоскости  $Oxz$ ) уравнениям (7.16, 7.18), полученным путём непосредственного разложения уравнений движения по степеням нелинейности. *Указание:* следует учесть, что  $\psi$  есть потенциал, взятый на поверхности жидкости, тогда как в уравнениях (7.16, 7.18) потенциал взят на плоскости  $z = 0$ .

## §7-6. Волны на поверхности слабо вязкой жидкости

При наличии вязкости изменяются граничные условия, так что найденное решение для идеальной жидкости граничным условиям уже не удовлетворяет. Действительно, если взять решение для идеальной жидкости, то на свободной поверхности окажется отличным от нуля касательный тензор напряжений  $\sigma'_{\tau n}$

$$\sigma'_{in} = 2\eta\delta_{il}^{\perp}n_k\partial_l\partial_k\phi \neq 0, \quad (7.23a)$$

где проектор  $\delta_{il}^{\perp}$  на касательную плоскость к поверхности определён в (7.2d). Таким образом, истинное решение не может описываться чисто потенциальным течением и должно содержать завихренность. Завихренность отлична от нуля только в узких вязких пограничных слоях вблизи дна и поверхности, толщина которых  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ , см. § 3-5 и, в частности, формулу (3.16c). Для того, чтобы волна затухала за время, большое по сравнению с её периодом колебаний, мы должны предположить, что в задаче есть малый параметр

$$\gamma = \sqrt{\frac{\nu k^2}{\omega}} \ll 1, \quad (7.23b)$$

то есть, иными словами, толщина погранслоя (мы будем его называть также вязким подслоем) мала по сравнению с длиной волны,  $\delta k \ll 1$ . Тогда потенциальное приближение верно описывает течение почти во всём объёме за исключением тонких вязких подслоёв.

### 7-6.1 Затухание волн на глубокой воде

Не находя непосредственно вихревой добавки в течение, можно найти скорость затухания волн. Для этого добавим внешние поверхностные силы, благодаря которым граничные условия вязкой жидкости удовлетворяются для течения, найденного для идеальной жидкости. К свободной поверхности следует приложить силы, компенсирующие  $\sigma'_{in}$ . Мощность  $Q$ , затрачиваемая поверхностными силами на единицу площади, в квадратичном по амплитуде волны приближении равна

$$Q = \langle v_{\alpha}\sigma'_{\alpha z} + v_z\sigma'_{zz} \rangle = 2\eta \langle \partial_{\alpha}\phi\partial_{\alpha z}\phi + \partial_z\phi\partial_{zz}\phi \rangle \Big|_{z=0}. \quad (7.23c)$$

Эта мощность компенсирует диссипативные потери энергии за счёт вязкости. Усредняя по периоду волны, найдем, что мощность  $Q$  есть

$$Q = 4\eta k^2 \langle \phi\partial_z\phi \rangle = 8\nu k^2 \mathcal{T}_{kin} = 4\nu k^2 \mathcal{E}, \quad (7.23d)$$

где  $\mathcal{T}_{kin}$  — средняя кинетическая энергия на единицу площади, см. (7.13a). Тогда в отсутствии внешних сил, для полной энергии системы  $\mathcal{E}$  можно записать уравнение:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -4\nu k^2 \mathcal{E}, \quad \omega'' = 2\nu k^2, \quad (7.23e)$$

где  $\omega''$  — мнимая часть частоты при абсолютно действительном волновом числе  $k$ .

В случае свободной поверхности мощность  $Q$  выделяется в виде тепла в слое жидкости толщиной  $\sim 1/k$ , так что внутри вязкого подслоя выделяется лишь доля  $\sim \gamma$  этого тепла. Причина, как будет показано ниже в этом Пункте, состоит в том, что вихревая часть скорости в вязком подслое имеет малость  $\gamma$  по сравнению с потенциальной составляющей. Это отличает ситуацию свободной поверхности от твёрдой границы, см. § 3-5 и, в частности, (3.16g).

#### 7-6.1.1 Вывод дисперсионного соотношения

Теперь получим дисперсионное соотношение с учётом вязкости. На этом пути мы, в том числе, построим и поле скорости. Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, распространяющуюся вдоль  $x$ -направления в линейном по амплитуде волны приближении. Параметризуем скорость двумя потенциалами — потенциальной частью  $\phi$  и вихревой частью  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} v_x &= -\partial_x\phi + \partial_z\Psi, \\ v_z &= -\partial_z\phi - \partial_x\Psi. \end{aligned} \quad (7.23f)$$

Линеаризованное уравнение Навье-Стокса имеет вид

$$\partial_t\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \quad (7.23g)$$

откуда с учётом несжимаемости  $\text{div}\mathbf{v} = 0$  получаем, что потенциалы должны удовлетворять соотношениям:

$$\nabla^2\phi = 0, \quad (\partial_t - \nu\nabla^2)\Psi = 0, \quad P + gz = \partial_t\phi. \quad (7.23h)$$

Поскольку мы рассматриваем монохроматическую плоскую волну, в уравнениях  $\partial_t = -i\omega$ . Для вихревого потенциала  $\Psi$  это означает, что характерная длина его изменения равна  $\delta$ . Потенциал  $\Psi$  изменяется главным образом по нормальному направлению от границы внутрь жидкости, тогда как вдоль границы характерный масштаб его изменения равен длине волны. Малый параметр  $\gamma \ll 1$  позволяет разделить два масштаба — толщину вязкого подслоя и длину волны. В этом пределе производную по нормали от потенциала  $\Psi$  можно заменить на производную по вертикали.

Запишем граничные условия (7.2h) и (7.3a), линеаризованные по амплитуде волны:

$$\partial_t\eta = v_z, \quad (7.23i)$$

$$\partial_x v_z + \partial_z v_x = 0, \quad (7.23j)$$

$$P - 2\nu\partial_z v_z = -(\sigma/\rho)\nabla^2\eta. \quad (7.23k)$$

Первое уравнение есть кинематическое граничное условие (7.2h), второе уравнение есть динамическое граничное условие (7.3c) на касательное напряжение, последнее — динамическое граничное условие (7.3b) на нормальную силу.

Из (7.23h) следует, что для плоской монохроматической бегущей волны пространственно-временная зависимость потенциалов задаётся зависимостями

$$\begin{aligned}\phi &= \operatorname{Re}(\psi \exp(ikx - i\omega t) \exp(kz)), \\ \Psi &= \operatorname{Re}(\Psi_0 \exp(ikx - i\omega t) \exp(\varkappa z)),\end{aligned}\quad (7.23l)$$

где  $\psi$  и  $\Psi_0$  – некоторые константы, определяющиеся амплитудой волны, а комплексная величина  $\varkappa$  есть

$$\varkappa = \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu} + k^2} \approx \frac{1-i}{\delta}, \quad (7.23m)$$

где толщина  $\delta$  вязкого пограничного слоя определена в (3.16c). Таким образом, если волновое потенциальное течение проникает вглубь на  $\sim 1/k$ , то вихревая поправка проникает вглубь от поверхности всего на толщину вязкого подслоя  $\delta \sim \gamma/k$ .

Из динамического граничного условия (7.23j) на касательную силу получаем, что

$$\Psi_0 = \frac{\gamma^2}{1 + 2i\gamma^2} \psi \approx \gamma^2 \psi. \quad (7.23n)$$

Это означает, что внутри вязкого подслоя амплитуда вихревой поправки к горизонтальной скорости мала как  $\gamma$ ,  $\partial_z \Psi \sim \gamma k \psi$  (напомним, что  $k\psi$  есть амплитуда скорости на поверхности), а амплитуда вертикальной скорости ещё меньше,  $\partial_x \Psi \sim \gamma^2 k \psi$ . Из кинематического граничного условия (7.23i) находим

$$\eta_0 = -\frac{ik}{\omega} \frac{1}{1 + 2i\gamma^2} \psi. \quad (7.23o)$$

Наконец, баланс нормальных сил (7.23k) приводит к уравнению

$$\frac{\omega^2}{gk + \sigma k^3/\rho} = \frac{1}{1 + 4i\gamma^2 - (\varkappa/k + 1)\gamma^4} \approx 1 - 4i\gamma^2. \quad (7.23p)$$

В результате приходим к дисперсионному соотношению

$$\omega = \omega_k (1 - 2i\gamma^2), \quad \omega_k = \sqrt{gk + (\sigma/\rho)k^3}. \quad (7.23q)$$

## 7-6.2 Задачи

• **Задача 1:** Прямым вычислением убедитесь, что скорость диссипации энергии в поверхностной волне на глубокой воде (7.23d) можно вычислить как объёмный интеграл от вязкой скорости диссипации кинетической энергии течения, см. (2.14b), причём в качестве поля скорости волны достаточно брать только его потенциальную компоненту.

• **Задача 2:** Найдите скорость затухания гравитационной волны, когда жидкость нельзя считать глубокой, так что  $kd \lesssim -\ln \gamma$ , где  $d$  – глубина жидкости,  $k$  – волновое число, безразмерное число  $\gamma \ll 1$  (7.23b),  $\omega$  – частота волны,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости.

• **Задача 3:** Имеется бесконечно глубокий водоём (уровень жидкости в состоянии покоя есть  $z = 0$ ), который ограничен в  $x$ -направлении вертикальными отвесными стенками, располагающимися в плоскостях  $x = 0$  и  $x = L$ . В третьем  $y$ -направлении водоём неограничен. Рассмотрим стоячие волны, у которых волновой вектор направлен вдоль  $x$ -оси. i) Считая жидкость идеальной, найдите собственные частоты для таких волн. ii) Считая жидкость слабо вязкой, найдите скорость затухания таких волн.

• **Задача 4:** Имеется бесконечно глубокий водоём (уровень жидкости в состоянии покоя есть  $z = 0$ ), который ограничен в  $x$ -направлении вертикальными отвесными стенками, располагающимися в плоскостях  $x = 0$  и  $x = L$ . В третьем  $y$ -направлении водоём неограничен. Считая жидкость слабо вязкой, найдите скорость затухания волн, бегущих вдоль оси  $Oy$ .

Глава 8

# ТЕЧЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

## §8-1. Уравнения течения вращающейся жидкости

Рассмотрим течение жидкости, весь объём которой претерпевает вращение как целое с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$ . Тогда для описания течения на фоне вращения следует перейти в систему отсчёта, вращающуюся с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}$ . В инерциальной системе декартовы координаты  $\{t, \mathbf{r}\}$  выберем так, чтобы начало координат  $\mathbf{r} = 0$  находилось на оси вращения, а при  $t = 0$  с пространственными координатами  $\mathbf{r}$  совпадали декартовы координаты  $\mathbf{r}'$  вращающейся системы отсчёта,  $\mathbf{r}'|_{t=0} = \mathbf{r}$ . При таком выборе пересчёт между координатами осуществляется по формуле

$$\mathbf{r}' = \exp(\hat{\Omega}t)\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \exp(-\hat{\Omega}t')\mathbf{r}', \quad \Omega^{ik} = \epsilon_{ikl}\Omega^l,$$

где время в новой системе координат то же самое,  $t' = t$  и, напомним, действие антисимметричной матрицы на вектор эквивалентно векторному произведению этого вектора с соответствующим аксиальным вектором,  $\hat{\Omega}\mathbf{r} = -[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$ . Отсюда следует преобразование производных

$$\partial_t = \partial_{t'} + (\hat{\Omega}\mathbf{r}' \cdot \nabla'), \quad \nabla = \exp(-\hat{\Omega}t)\nabla'.$$

Пересчёт скоростей осуществляется согласно правилу

$$\mathbf{v} = \exp(-\hat{\Omega}t)(\mathbf{v}' - \hat{\Omega}\mathbf{r}'), \quad \mathbf{v}' = \exp(\hat{\Omega}t)(\mathbf{v} - [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]). \quad (8.1a)$$

В частности, если бы жидкость вращалась как твёрдое тело, то в неподвижной системе координат поле скорости  $\mathbf{v}$  и завихренность  $\boldsymbol{\varpi}$  были бы

$$\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}], \quad \boldsymbol{\varpi} = 2\mathbf{\Omega}, \quad (8.1b)$$

а во вращающейся системе координат  $\mathbf{v}' = 0$ .

Поскольку есть выделенное направление, заданное вращением, нам потребуется выделять поперечные этому вращению компоненты векторов 'x', 'y'. Будем это делать первыми буквами греческого алфавита  $\{\alpha, \beta, \dots\}$ .

Теперь перейдём к выводу уравнений течения во вращающейся системе координат. Субстациональная (лагранжева) производная

$$(\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla))e^{-\hat{\Omega}t'} = e^{-\hat{\Omega}t'}(\partial_{t'} - \hat{\Omega} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla')),$$

поэтому

$$e^{\hat{\Omega}t'}(\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla))\mathbf{v} = (\partial_{t'} - \hat{\Omega} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla'))(\mathbf{v}' - \hat{\Omega}\mathbf{r}').$$

Как видим, преобразование производных и скоростей векторной величины можно свести к условным правилам  $d/dt \rightarrow d/dt - \hat{\Omega}$  и  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$ . В результате уравнение Навье-Стокса (2.8) во вращающейся системе отсчёта приобретает вид (мы опускаем штрихи, обозначающие принадлежность ко вращающейся системе координат)

$$\begin{aligned} \partial_t v_i + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_i + 2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}]_i &= \quad (8.1c) \\ &= -\frac{1}{\rho}\partial_i P - [\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]]_i + \frac{1}{\rho}\partial_k \sigma'_{ik} + f_i, \end{aligned}$$

где тензор вязких напряжений  $\sigma'_{ik}$  вычисляется по той же формуле (2.8a), как и в инерциальной системе координат. Слагаемое  $2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}]$  в левой части (8.1c) называют *силой Кориолиса* (Coriolis force); слагаемое  $-[\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]]$  в правой части уравнения есть массовая плотность *центробежной силы* (centrifugal force), возникающей во вращающейся системе отсчёта. Центробежная сила направлена от оси вращения и является потенциальной:

$$-[\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]] = -\text{grad } \varphi_\Omega, \quad \varphi_\Omega = -\frac{[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]^2}{2}. \quad (8.1d)$$

### 8-1.1 Несжимаемая жидкость

Если плотность жидкости можно считать постоянной,  $\rho = \rho_0$ , а течение ограничено твёрдыми неподвижными стенками, то центробежная сила, будучи потенциальной, приводит только к изменению давления. Введём эффективное давление

$$p = P/\rho_0 + \varphi_\Omega = \frac{P}{\rho_0} - \frac{[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]^2}{2}, \quad (8.2a)$$

которое должно определяться из условия  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . В этом случае уравнение Навье-Стокса получается одно дополнительное слагаемое — силу Кориолиса

$$(\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla))\mathbf{v} + 2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}] = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}/\rho_0, \quad (8.2b)$$

сравни с (2.12c). Это уравнение, переписанное в терминах завихренности скорости  $\boldsymbol{\varpi} = \text{rot } \mathbf{v}$ , имеет вид

$$(\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla))\boldsymbol{\varpi} - 2(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\boldsymbol{\varpi} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\varpi} + \mathbf{f}_\boldsymbol{\varpi}, \quad (8.2c)$$

где  $\mathbf{f}_\boldsymbol{\varpi} = \text{rot } \mathbf{f}/\rho_0$ , сравни с (2.12g). Ниже в этом параграфе, если не оговорено противное, мы рассматриваем несжимаемую жидкость.

Если жидкость считать идеальной, положив  $\nu = 0$ , то кинетическая энергия течения во вращающейся жидкости будет сохраняться во времени, то есть

$$\partial_t K = \partial_t \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (8.2d)$$

Скорость локального изменения плотности кинетической энергии подчиняется формально тому же уравне-

нию (2.14b), хотя теперь давление включает в себя центробежный потенциал согласно (8.2a), а также учитывает влияние сил Кориолиса. Сохраняется также и спиральность

$$\partial_t H = \partial_t \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (8.2e)$$

## §8-2. Инерционные волны

Рассмотрим предел быстро вращающейся, несжимаемой,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

и изотермической жидкости. Этот предел предполагает, что нелинейное взаимодействие течения с самим собой (за это отвечает член  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$  в уравнении Навье-Стокса (8.2b)) мало по сравнению с силой Кориолиса. Если  $v_\lambda$  — характерная величина скорости течения на масштабе  $\lambda$ , то условие относительной быстроты вращения на этом масштабе означает, что число Россби мало,

$$\operatorname{Ro}_\lambda = \frac{v_\lambda / \lambda}{2\Omega} \ll 1. \quad (8.3)$$

Обратим внимание, что построенный безразмерный параметр (8.3) имеет смысл только в том случае, если поле скорости существенно изменяется в том числе и вдоль оси вращения при смещении на расстояние  $\sim \lambda$ . Это требование следует из вида члена  $2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  в уравнении на завихренность (8.2c), происходящего из силы Кориолиса и содержащего только производную вдоль  $\boldsymbol{\Omega}$ .

### 8-2.1 Разложение поля скорости по волнам с круговой поляризацией

Несжимаемость течения означает, что в действительности трёх-мерное поле скорости (убывающее вдали от интересующей нас области) параметризуется всего двумя независимыми скалярными функциями. Одной из возможных параметризаций скорости является разложение по плоским волнам с двумя круговыми поляризациями:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \mathbf{v}_{\mathbf{k}s} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})). \quad (8.4a)$$

Здесь  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, а  $s$  — знак поляризации. Такая параметризация оказывается адекватной физике, если жидкость быстро вращается как целое, так что мало число Россби  $\operatorname{Ro}$ , см. (8.3). По определению, каждая поляризация удовлетворяет уравнению

$$[\mathbf{n}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{\mathbf{k}s}] = i s \mathbf{v}_{\mathbf{k}s}, \quad (8.4b)$$

где единичный вектор в направлении волнового вектора  $\mathbf{n}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ . В терминах завихренности равенство (8.4b)

переписывается в виде

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}s} = i k [\mathbf{n}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{\mathbf{k}s}] = -s k \mathbf{v}_{\mathbf{k}s}. \quad (8.4c)$$

Пользуясь тем, что у нас есть выделенное направление — ось вращения жидкости  $\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\Omega}/\Omega$  — введём базисные вектора круговых поляризаций согласно формулам

$$\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s = \frac{[\mathbf{k} \times ([\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z] + i s k \mathbf{e}_z)]}{\sqrt{2} k^2 \sin \theta_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{\sqrt{2} k k_\perp} \begin{pmatrix} k_z k_x + i s k k_y \\ k_z k_y - i s k k_x \\ -k_\perp^2 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{s*} \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^\sigma) = \delta^{s\sigma}, \quad \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{s*} = \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s} = \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^s,$$

$$\mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^{-s} = \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s] = i s k \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{s*}, \quad (8.4d)$$

где  $\theta_{\mathbf{k}}$  есть угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и вектором угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\Omega}$ . Разложение по базисным векторам скорости и завихренности имеет вид

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \sum_s \mathbf{v}_{\mathbf{k}s}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{k}s} = a_{\mathbf{k}s} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}s} = -s k a_{\mathbf{k}s} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s. \quad (8.4e)$$

В силу вещественности поля скорости

$$a_{-\mathbf{k}s} = a_{\mathbf{k}s}^*. \quad (8.4f)$$

Это означает, что для полного описания поля скорости можно ограничиться использованием полу-пространства волновых векторов, например, наложив условие  $k_z > 0$ .

Полные удельная кинетическая энергия (2.7e) и спиральность (2.13) записываются в виде

$$K = \int (d^3 k) \frac{|\mathbf{v}_{\mathbf{k}}|^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1} \int (d^3 k) |a_{\mathbf{k}s}|^2, \quad (8.4g)$$

$$H = \int (d^3 k) \boldsymbol{\omega}_{-\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = - \sum_{s=\pm 1} \int (d^3 k) s k |a_{\mathbf{k}s}|^2.$$

Отметим, что спиральность линейна по поляризации волн  $s$ , т.е. волны с противоположными круговыми поляризациями имеют противоположную спиральность.

## 8-2.2 Линеаризованная динамика

Малость числа Россби означает, что силы инерции в течении малы по сравнению с силой Кориолиса. Пренебрежём силой инерции в уравнении Навье-Стокса (8.2b), что равносильно его линеаризации по амплитуде скорости течения  $\mathbf{v}$ . В результате придём к уравнению

$$\partial_t \mathbf{v} + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (8.5a)$$

Это уравнение, переписанное в терминах завихренности флуктуаций скорости  $\boldsymbol{\varpi} = \text{rot } \mathbf{v}$ , имеет вид

$$\partial_t \boldsymbol{\varpi} - 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \boldsymbol{\varpi}. \quad (8.5b)$$

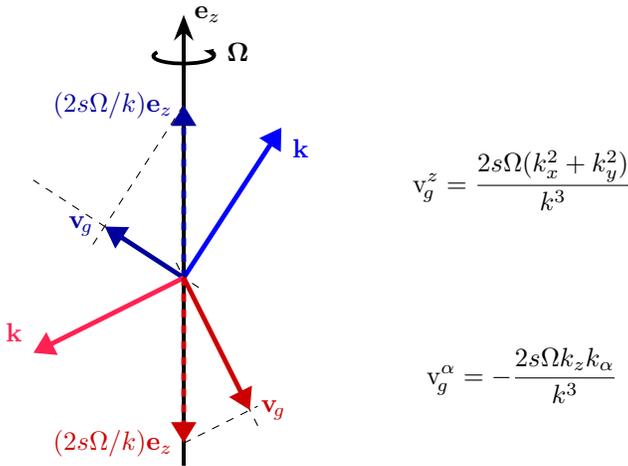


Рис. 8.1 Примеры взаимного расположения угловой скорости вращения жидкости, волнового вектора и групповой скорости в зависимости от знаков поляризации и компонент векторов.

Уравнение (8.5b) переписывается в терминах волн с круговыми поляризациями (8.4b) следующим образом:

$$\partial_t \boldsymbol{\varpi}_{\mathbf{k}s} = -i s \omega_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\varpi}_{\mathbf{k}s} - \nu k^2 \boldsymbol{\varpi}_{\mathbf{k}s}, \quad (8.5c)$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = 2\Omega \cos \theta_{\mathbf{k}}, \quad \cos \theta_{\mathbf{k}} = k_z/k = (\mathbf{n}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}_z).$$

Частота согласно (8.5c) зависит только от направления волнового вектора и изменяет знак при изменении знака круговой поляризации волны. Групповая скорость  $\mathbf{v}_g$  потому направлена ортогонально волновому вектору,  $(\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}) = 0$ ,

$$\begin{aligned} v_g^i &= 2s\Omega \frac{\partial(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}})}{\partial k_i} = \frac{2s\Omega}{k} \delta_{iz}^\perp = \\ &= \frac{2s\Omega}{k} [\mathbf{n}_{\mathbf{k}} \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_{\mathbf{k}}]]^i, \end{aligned}$$

$$|\mathbf{v}_g| = \frac{2\Omega \sin \theta_{\mathbf{k}}}{k} \quad (8.5d)$$

где проектор на поперечную волновому вектору плоскость  $\delta_{ij}^\perp = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ . При этом вектора  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{k}$

и  $\mathbf{v}_g$  лежат в одной плоскости. Их проекции на ось вращения имеют одинаковый знак, то есть их проекции на горизонтальную плоскость направлены противоположно друг другу. Отметим, что групповая скорость не изменяется при инверсии волнового вектора  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ , что находится в соответствии с симметрией (8.4f). Давление в волне можно получить, спроектировав уравнение (8.5a) на волновой вектор  $\mathbf{k}$  и выделив вклад от одной из поляризаций, см. (8.4e):

$$p_{\mathbf{k}s} = -\frac{\sqrt{2} s \Omega}{k} \sin \theta_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}s}. \quad (8.5e)$$

Визуализация инерционных волн в эксперименте проведена, например, в работе [Bordes и др., 2012].

Частота волн достигает максимума по амплитуде, когда волновой вектор направлен вдоль оси вращения. При этом групповая скорость обращается в ноль. Пусть волновой вектор направлен почти вертикально,  $k_\alpha \ll k_z$ , то есть  $\sin \theta \ll 1$ . Тогда компоненты единичного вектора  $n_{\mathbf{k}}^z \approx \pm 1$ ,  $n_{\mathbf{k}}^\alpha \ll 1$ . Частота волн равна

$$s\omega_{\mathbf{k}} = 2s\Omega(1 - \sin^2 \theta_{\mathbf{k}}) \approx 2s\Omega,$$

а групповая скорость направлена почти горизонтально, её горизонтальные компоненты относительно малы

$$v_g^\alpha = -\frac{2s\Omega}{k} n_{\mathbf{k}}^\alpha \ll \Omega/k.$$

Отметим, что групповые скорости волн с одинаковым волновым вектором  $\mathbf{k}$  и противоположными поляризациями  $s = \pm 1$  направлены противоположно. Это может быть важным, если возбуждающая сила локализована в пространстве и низкочастотна по сравнению с частотой вращения  $\Omega$ . В этом случае возбуждаются только низкочастотные волны, у которых волновой вектор лежит почти в плоскости вращения,  $k_z \ll k$ . Частота таких волн мала,

$$s\omega_{\mathbf{k}} = 2s\Omega \frac{k_z}{k} \ll 2\Omega, \quad (8.5f)$$

тогда как групповая скорость велика и направлена вдоль оси вращения:

$$\mathbf{v}_g = \frac{2s\Omega}{k} \mathbf{e}_z. \quad (8.5g)$$

Таким образом, волны с противоположными поляризациями движутся вдоль и против оси вращения независимо от направления волнового вектора в плоскости вращения. В результате происходит пространственное разделение спиральности в направлении оси вращения.

Выпишем также явно компоненты физического поля скорости (не комплексной амплитуды), что оказывается компактнее сделать в повернутой декартовой системе координат  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  (образуют правую тройку), ось  $O\zeta$

которой направлена вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} s = +1: \quad \begin{pmatrix} v^\xi \\ v^\eta \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(k\zeta + 2\Omega t \cos \theta_{\mathbf{k}}) \\ \sin(k\zeta + 2\Omega t \cos \theta_{\mathbf{k}}) \end{pmatrix}, \quad (8.5h) \\ \boldsymbol{\varpi} &= -k\mathbf{v}, \\ s = -1: \quad \begin{pmatrix} v^\xi \\ v^\eta \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(k\zeta - 2\Omega t \cos \theta_{\mathbf{k}}) \\ -\sin(k\zeta - 2\Omega t \cos \theta_{\mathbf{k}}) \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\varpi} &= k\mathbf{v}. \end{aligned}$$

где  $s\omega_{\mathbf{k}} = 2s\Omega \cos \theta_{\mathbf{k}}$  — частота волн (8.5c). Напомним здесь, что в системе координат, ось  $z$  которой направлена вдоль оси вращения, комплексные компоненты выглядят согласно (8.4d).

### 8-2.3 Волновое уравнение и его решение в цилиндрических координатах

Вернёмся к исследованию общих свойств уравнения (8.5a), описывающего инерционные волны. Получим сначала волновое уравнение, а затем исследуем его решения в цилиндрических координатах. Цилиндрические координаты интересны тем, что они позволяют описывать распространение волн на фоне аксиально-симметричных геострофических вихрей, см. ниже § 8-3.

Для получения волнового уравнения возьмём сначала ротор от обеих частей уравнения (8.5b) на завихренность:

$$2(\boldsymbol{\Omega}\nabla)\boldsymbol{\omega} = \nu\Delta^2\mathbf{v} - \partial_t\Delta\mathbf{v}.$$

Теперь подействуем на это же уравнение (8.5b) оператором  $2(\boldsymbol{\Omega}\nabla)$  и подставим полученное только что выражение для  $2(\boldsymbol{\Omega}\nabla)\boldsymbol{\omega}$ :

$$\partial_t^2\Delta\mathbf{v} + 4(\boldsymbol{\Omega}\nabla)^2\mathbf{v} = 2\nu\partial_t\Delta^2\mathbf{v}. \quad (8.5i)$$

Мы пренебрегли вкладом, пропорциональным второй степени вязкости, считая его относительно малым. Уравнение (8.5i) есть искомое волновое уравнение. В частности, оно даёт дисперсионный закон (8.5c).

Опишем теперь распространение инерционных волн в цилиндрических координатах  $\{r_\perp, \varphi, z\}$ . Для простоты пренебрежём вязкостью, предполагая её малой. Предполагаем, что волна характеризуется частотой  $\omega$ , волновым числом вдоль оси вращения  $k_z$  и аксиальным числом  $m$ , то есть в цилиндрических координатах каждая компонента скорости содержит зависимость

$$\exp(-i\omega t + im\varphi + ik_z z)$$

от  $t$ ,  $\varphi$  и  $z$ . Уравнения Эйлера (8.5a) и непрерывности, записанные в цилиндрических координатах, имеют вид

$$\begin{aligned} -i\omega v^\perp - 2\Omega v^\varphi &= -\partial_\perp p, \\ -i\omega v^\varphi + 2\Omega v^\perp &= -imp/r_\perp, \\ -i\omega v^z &= -ik_z p, \end{aligned} \quad (8.5j)$$

$$\frac{1}{r_\perp}\partial_{r_\perp}(r_\perp v^\perp) + \frac{im}{r_\perp}v^\varphi + ik_z v^z = 0.$$

Волновое уравнение (8.5i) наиболее простой уравнения Бесселя вид имеет будучи записанным в терминах вертикальной компоненты скорости  $v^z$  или пропорционального ей давления  $p$ :

$$\left(\partial_\perp^2 + \frac{1}{r_\perp}\partial_\perp - \frac{m^2}{r_\perp^2} + k_\perp^2\right)v^z = 0, \quad k_\perp^2 = |k_z|\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1}. \quad (8.5k)$$

### 8-2.4 Квадратичные средние

Пусть распределение скорости во времени и пространстве соответствует плоской волне:

$$\mathbf{v} = 2\operatorname{Re}\left(a\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - is\omega_{\mathbf{k}}t)\right). \quad (8.5l)$$

Тогда давление согласно (8.5e) равно

$$p = -\frac{2\sqrt{2}s\Omega \sin \theta_{\mathbf{k}}}{k} \operatorname{Re}\left(a \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - is\omega_{\mathbf{k}}t)\right). \quad (8.5m)$$

Кинетическая энергия во всём пространстве распределена однородно с плотностью

$$\rho_w^K = \frac{v^2}{2} = |a|^2, \quad (8.5n)$$

сравни с (8.4g). Поток энергии есть плотность энергии помноженная на групповую скорость,  $\langle \mathbf{j}_w^E \rangle = \mathbf{v}_g \rho_w^K$ . Отметим, что тогда как в мгновенном значении плотности кинетической энергии (8.5n) нет осциллирующих вкладов, в мгновенном значении потока энергии они есть.

Объёмная плотность среднего импульса (она же плотность потока массы) равна нулю. Однако средний поток импульса нулю не равен:

$$\langle v_i v_j \rangle = (h_{\mathbf{k}i}^s h_{\mathbf{k}j}^{s*} + h_{\mathbf{k}i}^{s*} h_{\mathbf{k}j}^s) |a|^2 = |a|^2 \delta_{ij}^\perp, \quad (8.5o)$$

где проектор  $\delta_{ij}^\perp = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ , а по  $s$  суммирование в (8.5o) нет.

### 8-2.5 Задачи

• **Задача 1:** Рассмотрим плоскую монохроматическую инерционную волну с полем скорости (8.5l). Удержав только квадратичные члены по амплитуде инерционной волны в выражении для потока кинетической энергии в несжимаемой жидкости (2.14b) (выражение под знаком дивергенции в правой части уравнения), найдите плотностью потока кинетической энергии. *Указание:* Ответ должен совпасть с  $\mathbf{v}_g \rho_w^K$ .

• **Задача 2:** Покажите, что плоская инерционная волна является точным решением уравнения Навье-Стокса. *Примечание:* при конечных амплитудах, однако, плоская инерционная волна оказывается неустойчивой.

• **Задача 3:** Определите собственные моды инерционных стоячих волн и их частоты колебаний в цилиндре кругового сечения, который вращается вокруг

своей оси. Радиус основания цилиндра равен  $R$ , его высота —  $H$ . Жидкость считать идеальной. Используйте цилиндрические координаты, в которых нижний торец

цилиндра лежит в плоскости  $z = 0$ , а верхняя — в плоскости  $z = H$ . Для краткости запишите частоту  $\omega$  измерять в  $2\Omega$ , расстояние — в  $H$ .

### §8-3. Квази-двумерное течение

Теперь рассмотрим другой вид течения несжимаемой жидкости, которое однородно вдоль оси вращения. В этом случае производная от всех величин вдоль оси вращения равна нулю,  $\partial_z = 0$ . Тогда в уравнении на завихренность (8.2с) сила Кориолиса равна нулю. Мы по-прежнему предполагаем безразмерный параметр  $\text{Ro}$  малым (8.3). Отсюда следует, что характерная скорость динамики такого течения (будем его называть квази-двумерным) мала и по порядку величин есть  $\text{Ro} \cdot \Omega$ . Это значительно медленнее, чем частота осцилляций инерционных волн  $\sim \Omega$  с волновым вектором, направленным под углом  $\sim \pi/2$  к плоскости, ортогональной оси вращения.

Уравнение Навье-Стокса распадается на два уравнения. Первое — уравнение на  $z$ -компоненту скорости

$$(\partial_t + v^\alpha \partial_\alpha) v^z = -\nu \Delta v^z + f^z / \rho. \quad (8.6a)$$

Это уравнение описывает перенос поля  $v^z$  планарной проекцией скорости  $v^\alpha$ , представляющей собой двумерное течение. Второе уравнение — уравнение на это двумерное течение  $v^\alpha(t, \mathbf{r}_\perp)$ :

$$\partial_t v^\alpha + (v^\alpha \partial_\alpha) v^\alpha = 2\Omega \epsilon^{\alpha\beta} v^\beta - \partial_\alpha p + \nu \Delta v^\alpha + \frac{f^\alpha}{\rho}, \quad (8.6b)$$

Уравнение (8.6b) не зависит от  $z$ -компоненты скорости. Для двумерного несжимаемого течения сила Кориолиса является потенциальной, т.е. не влияющей на течение несжимаемой жидкости. Действительно, ротор силы Кориолиса равен нулю,

$$\epsilon^{\gamma\alpha} \partial_\gamma (2\Omega \epsilon^{\alpha\beta} v^\beta) = -2\Omega \partial_\beta v^\beta = 0. \quad (8.6c)$$

Если мы введём функцию тока  $\Psi$  (6.4), то сила Кориолиса в явном виде будет представлена как градиент потенциала:

$$2\Omega \epsilon^{\alpha\beta} v^\beta = -2\Omega \partial_\alpha \Psi. \quad (8.6d)$$

Эффективным давлением теперь следует назвать

$$p = \frac{P}{\rho} - \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2}{2} + 2\Omega \Psi, \quad (8.6e)$$

сравни с (8.2a), а уравнение (8.6b) становится идентичным уравнению Навье-Стокса для двумерного течения (6.1):

$$\partial_t v^\alpha + (v^\beta \partial_\beta) v^\alpha = -\partial_\alpha p + \nu \Delta v^\alpha + \frac{f^\alpha}{\rho}. \quad (8.6f)$$

Итак, динамика двумерного несжимаемого течения, направленного в плоскости, ортогональной оси вращения жидкости как целого, и однородного вдоль этой оси, не зависит от скорости вращения.

**Геострофический баланс.** Эффективное давление  $p$  в (8.6e, 8.6f) зависит квадратично от градиента скорости  $\mathbf{v}$  и не зависит от скорости глобального вращения  $\Omega$ . Поскольку число Россби  $\text{Ro}$  (8.3) предполагается малым, то  $p$  представляет собой параметрически меньшую часть давления. Чтобы определить физическое давление  $P$  приближённо, можно приравнять  $p$  (8.6e) нулю, получив

$$P = \frac{\rho [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2}{2} - 2\rho \Omega \Psi. \quad (8.6g)$$

Факт существования второго вклада в давление, билинейного по скорости глобального вращения и по скорости течения, принято называть *геострофическим балансом*. А само квази-двумерное течение (без вертикального движения), в котором выражение для давления (8.6g) выполняется с точностью до малых поправок, называют *геострофическим*; примером такого течения является как раз течение, характеризующееся малым числом Россби.

**Теорема Тейлора-Прудмана.** Тенденция к несущественности сил Кориолиса для течения, независимого от координаты вдоль оси вращения, наблюдается и в законе дисперсии инерционных волн, у которых волновой вектор направлен почти ортогонально оси вращения (8.5f). В этом случае частота волны стремится к нулю, то есть, действительно, сила Кориолиса становится всё менее существенной при  $k_z \rightarrow 0$ . Для такого квази-двумерного течения (у которого масштаб  $\lambda_z$  вдоль оси  $Oz$  намного больше масштаба  $\lambda_\perp$  в поперечной плоскости,  $\lambda_z \gg \lambda_\perp$ ) число Россби

$$\text{Ro}_\perp = \frac{v_\lambda \lambda_z}{2\Omega \lambda_\perp^2} \sim \frac{(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}}{2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}]} \quad (8.6h)$$

может быть сравнимым или даже существенно больше единицы, даже если число Россби (8.3), формально вычисленное в предположении изотропии течения (с  $\lambda = \lambda_\perp$ ), мало. *Квази-двумерным течением* мы будем называть течение, для которого анизотропное число Россби велико,  $\text{Ro}_\perp \gg 1$ .

*Теорема Тейлора-Прудмана (Taylor-Proudman theorem)* устанавливает связь в обратную сторону: если сила Кориолиса несущественна для течения, т.е. является чисто потенциальной, то течение квази-двумерно. Взяв ротор от силы Кориолиса

$$\text{rot} (2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}]) = 2(\boldsymbol{\Omega} \nabla) \mathbf{v}$$

см. (8.2c), и потребовав его равенство нулю, мы придём к утверждению

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (8.6i)$$

### 8-3.1 Задачи

• **Задача 1:** Показать, что в циклоне геострофический баланс приводит к относительному понижению

давления, тогда как в антициклоне — к относительному повышению. *Циклон* — это вихрь квази-двумерного течения, в котором завихренность (6.2,6.4)  $\varpi$  имеет знак, совпадающий со знаком глобального вращения  $\Omega$ . А в *антициклоне*, наоборот, эти знаки противоположны.

## §8-4. Влияние стенок на течение вращающейся жидкости

### 8-4.1 Горизонтальные стенки

Пусть быстро вращающаяся жидкость заключена в некотором объёме, который имеет “горизонтально” расположенные границы, т. е. границы, параллельные плоскости  $Oxy$ . Рассмотрим динамику геострофического течения в этом случае. В отсутствие границ геострофическое течение было рассмотрено в Пункте 8-3. В этом параграфе геострофическое течение (течение вдали от стенок, однородное вдоль оси вращения) обозначим  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, x, y)$ , а полное течение

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{U}, \quad (8.7a)$$

где вторичное течение, вызванное присутствием стенок, зависит от всех трёх координат,  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, x, y, z)$ . Полное течение медленное, скорость его изменения значительно меньше  $\Omega$ . Будем интересоваться одной из горизонтальных границ, и для упрощения записи будем считать, что её положение совпадает с плоскостью  $z = 0$ , а жидкость находится в области  $z > 0$ . Вторая граница находится в плоскости  $z = H$ , так что высота сосуда равна  $H$ .

Эта задача была впервые рассмотрена в работе [Greenspan & Howard, 1963] для аксиально-симметричного течения.

#### 8-4.1.1 Слой Экмана

Однородность по вертикали геострофического течения нарушается вблизи горизонтальных границ, поскольку на границах скорость должна быть равна нулю вследствие условия прилипания. В слое, называемом слоем Экмана, амплитуда скорости снижается до нуля от своего значения в объёме. В слое Экмана существенную роль играет вязкий член в уравнении (8.2b). Мы будем считать толщину слоя Экмана малой по сравнению с характерным горизонтальным масштабом геострофического течения  $\mathbf{V}$ . Поэтому, исследуя свойства слоя Экмана, мы будем считать медленное течение  $\mathbf{U}$  зависящим только от вертикальной координаты,  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(z)$ . Уравнение (8.2b) с удержанными тремя ведущими членами имеет вид

$$2[\Omega \times \mathbf{V}] + 2[\Omega \times \mathbf{U}] = -\nabla p + \nu \partial_z^2 \mathbf{U}. \quad (8.7b)$$

Напомним, что слагаемое  $2[\Omega \times \mathbf{V}]$  в левой части (8.7b) является чисто потенциальным, так что согласно (8.6f,8.6g) изменяет только давление  $p$ , не влияя на динамику жидкости.

Поскольку в главном приближении вертикальная компонента скорости в объёме равна нулю,  $U^z = 0$ , то, решая задачу методом последовательных приближений, в (8.7b) мы должны положить  $U^z = 0$  в том числе и вблизи стенки. Тогда вертикальная компонента этого уравнения есть  $\partial_z p = 0$ , то есть давление не зависит от  $z$ -координаты и в слое Экмана.

Учитывая независимость давления от вертикали, проекция уравнения (8.7b) на плоскость  $Oxy$  есть

$$-2\Omega \epsilon^{\alpha\beta} U^\beta = \nu \partial_z^2 U^\alpha \quad (8.7c)$$

Граничные условия для (8.7c) суть  $\mathbf{U} = -\mathbf{V}$  при  $z = 0$ , поскольку на границе полная скорость (8.7a) должна обращаться в нуль, и  $\mathbf{U} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , поскольку в нулевом приближении в объёме полная скорость есть геострофическое течение,  $\mathbf{v} \approx \mathbf{V}$ . Уравнение (8.7c) можно переписать в виде

$$(\delta_E^2 \partial_z^2 - (1 - \hat{\epsilon})^2) \mathbf{U} = 0, \quad (8.7d)$$

где все матрицы и вектора двумерные, а толщина слоя Экмана

$$\delta_E = \sqrt{\nu/|\Omega|}. \quad (8.7e)$$

Решением (8.7d) является

$$\begin{aligned} U^\alpha &= - \left( \exp \left( - \frac{(1 - \hat{\epsilon})z}{\delta_E} \right) \mathbf{V} \right)^\alpha = \\ &= -e^{-z/\delta_E} \left( V^\alpha \cos(z/\delta_E) + \epsilon^{\alpha\beta} V^\beta \sin(z/\delta_E) \right). \end{aligned} \quad (8.7f)$$

Решение (8.7f) называется *спиралью Экмана*. Если  $\Omega < 0$ , то в первой строчке (8.7f) должна быть произведена замена  $1 - \hat{\epsilon} \rightarrow 1 + \hat{\epsilon}$ , во второй строчке изменён знак перед вторым слагаемым, и, разумеется, толщина слоя Экмана определяется как  $\delta_E = \sqrt{\nu/|\Omega|}$ .

Проинтегрируем решение (8.7f) по вертикали:

$$\int_0^{z \gg \delta_E} dz U^\alpha = -\frac{\delta_E}{2} V^\alpha + \pi^\alpha, \quad \pi^\alpha = -\frac{\delta_E}{2} \epsilon_{\alpha\beta} V^\beta. \quad (8.7g)$$

Первое слагаемое в правой части (8.7g) есть следствие ослабления геострофического течения внутри слоя Экмана. Более интересно второе слагаемое  $\pi^\alpha$ , которое представляет собой поток, повернутый на угол  $\pi/2$  относительно геострофического течения  $\mathbf{V}$ . Этот поток является сжимаемым, обеспечивающим появление вертикальной компоненты скорости вне слоя Экмана,  $U^z = -\operatorname{div} \pi$  на расстояниях  $\delta_E \ll z \ll H$ . Поток  $\pi$  называется *подсосом Экмана* (*Ekman suction*).

#### 8-4.1.2 Вторичные течения в объёме

Найдём теперь распределение вторичных течений в объёме. Для пояснения геометрии течения можно обратиться к Рисунку 8.2, где для циклонического вихря схематично изображен подсос Экмана и распределение вторичных течений в пространстве.

Нам следует теперь учесть, что геострофическое течение  $\mathbf{V}$  изменится на масштабе  $R \gg \delta_E$  в горизонтальной плоскости. Поскольку, как уже обсуждалось, геострофическое поле скорости  $\mathbf{V}$  является бездивергентным, то условие сохранения потока массы в слое Экмана можно записать в виде

$$\partial_z U^z = -\partial_\alpha U^\alpha. \quad (8.7h)$$

Проинтегрируем по вертикали уравнение (8.7h) от  $z = 0$  до некоторой точки  $z$ , расположенной вне слоя Экмана,  $z \gg \delta_E$ , но близко с точки зрения вертикальных размеров сосуда и характерного масштаба геострофического течения,  $z \ll H, R$ . Используя граничное условие  $U_z = 0$  при  $z = 0$  и решение (8.7f), получим, что вертикальная скорость над слоем Экмана

$$U_E^z = -\partial_\alpha \pi^\alpha = \frac{\delta_E}{2} \varpi_G, \quad (8.7i)$$

где завихренность геострофического течения

$$\varpi_G = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha V^\beta = \partial_x V^y - \partial_y V^x. \quad (8.7j)$$

Таким образом, мы установили, что в объёме жидкости возбуждается некоторое вторичное течение. Согласно (8.7i), оно пропорционально завихренности геострофического течения и толщине слоя Экмана. Поток от (или к) границе обеспечивается сжимаемостью горизонтального течения в слое Экмана (сжимаемость подсоса Экмана) (8.7g).

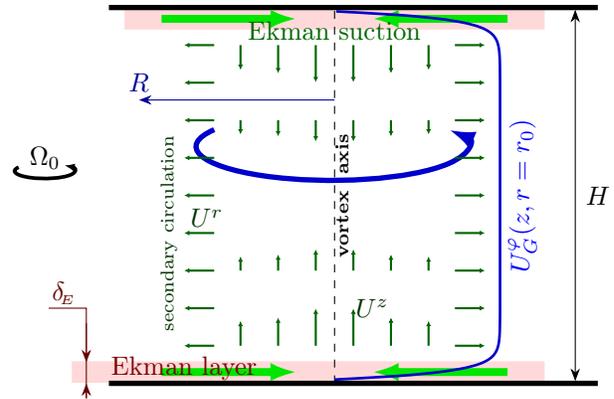


Рис. 8.2 Схематическое изображение течения, связанного с вихрём-циклоном, основное течение в котором обозначено жирной синей стрелкой. Маленькие вертикальные и горизонтальные стрелки изображают вертикальную и радиальную компоненты вторичного течения. В случае антициклона направления стрелок должно быть изменено на обратное, включая направление подсоса Экмана.

Геострофическое течение  $V^\alpha$  несжимаемо, а порождённое ею вторичное течение  $U^\alpha$ , наоборот, имеет завихренность, равную нулю,  $\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha U^\beta = 0$  (иначе эта комбинация содержала бы в себе часть геострофического течения). Из уравнения несжимаемости течения (8.7h) следует, что  $U^z$  линейно зависит от координаты  $z$ , так как  $U^\alpha$  от него не зависит (а иначе бы на  $U^\alpha$  действовала бы неоднородная по вертикали сила Кориолиса). Поскольку мы знаем значение  $U^z$  близи границ (вне слоёв Экмана), см. (8.7i), то можем написать его распределение в объёме:

$$U^z = \frac{H - 2z}{H} U_E^z = \frac{(H/2 - z)\delta_E}{H} \varpi_G. \quad (8.7k)$$

Поскольку же вторичное течение  $U^\alpha$  в объёме чисто потенциально, то возможно проинтегрировать уравнение несжимаемости (8.7h) по горизонтальной координате и получить

$$U^\alpha = \sqrt{\text{Ek}} \cdot \epsilon^{\alpha\beta} V^\beta. \quad (8.7l)$$

где мы определили число Экмана

$$\text{Ek} = (\delta_E/H)^2 = \frac{\nu}{\Omega H^2}. \quad (8.7m)$$

Горизонтальный поток (8.7l) компенсирует подсос Экмана (8.7g), так что полный горизонтальный поток — интеграл от нижней до верхней границ от  $U^\alpha$  — равен нулю.

Уже на этом этапе описания можно понять, что влияние слоя Экмана на динамику геострофического течения является существенным для стандартных экспериментальных установок. Для этого надо сравнить поверхностную плотность мощности, которая выделяется в результате вязкого трения в объёме течения и в слое Экмана. Пусть характерным масштабом геострофического

течения по горизонтали является  $R$ . Тогда мощность, выделяемая в объёме и приходящаяся на единицу площади поверхности  $Oxy$ , оценивается как  $\sim \nu H(V/R)^2$ . Мощность, выделяемая в слоях Экмана (их два, вблизи нижней и верхней границы) оценивается как  $\sim 2\nu V^2/\delta_E$ . На характерном масштабе

$$R_{\nu/\alpha} \equiv \sqrt{\delta_E H/2} = (\nu/\Omega)^{1/4} (H/2)^{1/2} \quad (8.7n)$$

эти две мощности равны; на масштабах  $R > R_\alpha$  динамику геострофического течения определяет вязкая диссипация в слое Экмана, которую мы также будем называть трением о дно. Для типичных значений в лабораторных экспериментах  $H = 50$  см,  $\nu = 0.01$  см<sup>2</sup>/с,  $\Omega_0 = 3$  с<sup>-1</sup> находим  $R_{\nu/\alpha} \sim 2$  см, что совпадает или даже меньше чем радиусы наблюдаемых в этих установках геострофических вихрей.

### 8-4.1.3 Трение о дно

Теперь мы можем установить эффективное уравнение на геострофическое течение. Уравнение (8.6b) на ведущую часть скорости  $\mathbf{V}$  (8.7a) в новых приобретает вид (мы пренебрегаем нелинейными поправками порядка  $\sqrt{Ek} \cdot \varpi_G U$  в силу предполагаемой малости числа Россби)

$$\partial_t V^\alpha + (V^\beta \partial_\beta) V^\alpha - 2\Omega \epsilon^{\alpha\beta} U^\beta = -\partial_\alpha p + \nu \Delta V^\alpha. \quad (8.7o)$$

Напомним, что тут в давлении уже учтён геострофический баланс (8.6e), как это было сделано ранее в (8.6f). Подставив найденное вторичное течение  $\mathbf{U}$  (8.7l) в уравнение (8.7o), приходим к искомому уравнению

$$\partial_t V^\alpha + (V^\beta \partial_\beta) V^\alpha = -\partial_\alpha p - \alpha V^\alpha + \nu \Delta V^\alpha, \quad (8.7p)$$

где коэффициент эффективного “трения о дно”

$$\alpha = 2\Omega \sqrt{Ek} = \frac{2\sqrt{\Omega\nu}}{H}. \quad (8.7q)$$

Уже данное выше определение характерного масштаба  $R_{\nu/\alpha}$  (8.7n) может быть определено и как масштаб, на котором сравниваются два диссипативных члена в (8.7p), то есть как  $R_{\nu/\alpha} = \sqrt{\nu/\alpha}$ .

## 8-4.2 Задачи

• **Задача 1:** Найти вторичное течение в аксиально-симметричном геострофическом вихре, у которого профиль скорости в цилиндрических координатах  $\{r_\perp, \varphi, z\}$  задаётся зависимостью  $V^\varphi(r_\perp) > 0$ , а скорость вращения положительна,  $\Omega > 0$  (т.е. вихрь является циклоном).

*Решение:* Для сравнения с выражениями (8.7) удобно скорость геострофического течения переписать в

декартовых координатах,  $V^\alpha = -(V^\varphi/r_\perp)\epsilon^{\alpha\beta}r^\beta$ . Тогда подсос Экмана (8.7g)  $\pi^\alpha = -(\delta_E/2r_\perp)r^\alpha V^\varphi$  направлен к оси вихря. Завихренность геострофического течения  $\varpi_G = (1/r_\perp)\partial_\perp(r_\perp V^\varphi)$ . В объёме горизонтальная часть вторичного течения (8.7l) направлена от оси вихря,  $U^\perp = \sqrt{Ek}V^\varphi$ , вертикальная компонента (8.7k)  $U^z = \sqrt{Ek}(H/2 - z)\varpi_G$ . Течение схематически изображено на Рисунке 8.2

• **Задача 2:** Найти вертикальную зависимость нормальной к горизонтальной поверхности (поверхности, нормальной к оси вращения) компоненты  $U^z$  вторичного течения внутри слоя Экмана.

• **Задача 3:** Пусть жидкость находится в поле тяжести, а вместо верхней жёсткой границы течения имеется свободная граница. Ускорение свободного падения на столько велико, что границу можно считать плоской, когда весь сосуд вращается. Опишите вторичные течения в вихре-циклоне в этом случае, модифицируете соответствующим образом Рисунок 8.2.

• **Задача 4:** Найти нелинейные по амплитуде геострофического течения поправки к члену  $\alpha\varpi^z$  в уравнении на завихренность  $\varpi^z$  (6.3), следующем из уравнения (8.7p).

*Решение:*

### 8-4.2.1 Отражение инерционных волн от стенок

• **Задача 5:** Плоская граница области течения жидкости, вращающейся как целое с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $Oz$ , описывается уравнением  $x \sin \theta_b + z \cos \theta_b = 0$ , так что нормаль к поверхности  $\boldsymbol{\ell} = \{\sin \theta_b, 0, \cos \theta_b\}$ ,  $-\pi < \theta_b < \pi$  (вектор направлен от стенки в жидкость). Инерционная волна падает на эту поверхность, имея волновой вектор  $\mathbf{k} = k\{\sin \theta_i, 0, \cos \theta_i\}$ ,  $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$  (в силу симметрии (8.4f) этим исчерпываются все возможные варианты), поляризацию  $s$  и комплексную амплитуду  $a = 1$  в разложении (8.4a, 8.4e). Групповая скорость (8.5d) падающей волны направлена к границе,  $(\mathbf{v}_g \cdot \boldsymbol{\ell}) < 0$ , иначе её не следовало бы называть падающей. Найдите: i) условие того, что волна  $\mathbf{k}s$  действительно является падающей, выраженное через параметры  $\theta_i, s, \theta_b$ ; ii) волновой вектор  $\mathbf{q} = q\{\sin \theta_r, 0, \cos \theta_r\}$ , поляризацию  $\sigma$  и квадрат модуля комплексной амплитуды  $|b|^2$  (интенсивность) отражённой волны. Жидкость считайте идеальной. *Указание:* На плоскости  $\theta_b - \theta_i$  нарисуйте области, в которых падающей волне соответствуют  $s = \pm 1$ . Далее на этой же плоскости выделите области, в которых поляризация отражённой волны совпадает с поляризацией падающей,  $\sigma = s$ , и противоположна ей,  $\sigma = -s$ . Обратите внимание, что у отражённой волны угол  $\theta_r$  может принимать в том числе значения  $|\theta_r| > \pi/2$ .



## Часть I

## ТЕЧЕНИЯ С ХАОТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

## Глава 9

## СЛУЧАЙНЫЕ ПОТОКИ ЖИДКОСТИ

## §9-1. Статистическое описание поля скорости в случайных потоках

Литература: [Frisch, 1995], [Falkovich, 2011], [Zakharov и др., 1992]

Рассмотрим  $d$ -мерное хаотическое течение. Пусть  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  – поле скорости потока жидкости. В этом пункте мы разрабатываем аппарат для статистического описания таких потоков.

## 9-1.1 Корреляционные функции

Простейшим примером корреляционной функции является парная корреляционная функция:

$$\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{R}) = \langle v^i(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2) v^j(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2) \rangle. \quad (9.1a)$$

Значения скоростей берутся в один и тот же момент времени. Из определения (9.1a) следует, что перестановка векторных индексов эквивалентна изменению знака аргумента,

$$\mathcal{K}^{ij}(-\mathbf{r}; \mathbf{R}) = \mathcal{K}^{ji}(\mathbf{r}; \mathbf{R}). \quad (9.1b)$$

Угловые скобки в (9.1a) означают усреднение. В зависимости от постановки задачи, это усреднение может пониматься

- В смысле усреднения по статистическому ансамблю. Если течение по времени статистически однородно, то это эквивалентно усреднению по времени.
- В смысле усреднения по пространству, если течение можно считать статистически однородным в пространстве. В этом случае корреляционная функция не зависит от вектора  $\mathbf{R}$ , поскольку определяется как

$$\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int d^d R v^i(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2) v^j(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2). \quad (9.1c)$$

где интегрирование производится по некоторому объёму  $\mathcal{V}$ , линейные размеры которого значительно превышают расстояние  $r$  между точками корреляционной функции.

Если течение статистически однородно по времени и по пространству, то оба усреднения дают один и тот же результат  $\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{r})$ .

Предположим, что мы интересуемся свойствами течения на масштабах, много меньших чем характерный размер сосуда, в котором происходит течение. Тогда нам может оказаться интересным выделить среднее, которое зависит только от разности скоростей на интересующих нас масштабах, отбросив общий перенос. Обозначим разность скоростей

$$\delta \mathbf{v}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2) - \mathbf{v}(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2), \quad (9.1d)$$

Структурной функцией второго порядка называется среднее

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{ik}(\mathbf{r}; \mathbf{R}) &\equiv \langle \delta v_{\mathbf{R}}^i(\mathbf{r}) \delta v_{\mathbf{R}}^k(\mathbf{r}) \rangle = & (9.1e) \\ &= (\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{0}, \mathbf{R} + \mathbf{r}/2) + \mathcal{K}^{ij}(\mathbf{0}, \mathbf{R} - \mathbf{r}/2)) - \\ &\quad - (\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{R}) + \mathcal{K}^{ji}(\mathbf{r}; \mathbf{R})). \end{aligned}$$

Таким образом, структурная функция является линейной комбинацией корреляционных функций. Из определения структурной функции следует её симметрия

$$\mathcal{S}^{ik}(\mathbf{r}; \mathbf{R}) = \mathcal{S}^{ki}(\mathbf{r}; \mathbf{R}) = \mathcal{S}^{ik}(-\mathbf{r}; \mathbf{R}). \quad (9.1f)$$

Разумно предположить, что интересующий нас масштаб  $\mathbf{r}$  мал по сравнению с характерным масштабом течения, и поэтому на этом масштабе случайное течение статистически однородно в пространстве. Тогда одноточечное среднее  $\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{0}; \mathbf{R})$  изменяется незначительно при сдвиге его аргумента  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \pm \mathbf{r}/2$ , поэтому

$$\mathcal{S}^{ik}(\mathbf{r}; \mathbf{R}) = 2\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) - (\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{r}; \mathbf{R}) + \mathcal{K}^{ji}(\mathbf{r}; \mathbf{R})). \quad (9.1g)$$

**Разновременные корреляционные функции**

Можно также исследовать разновременные корреляционные функции. Парная разновременная корреляционная функция определяется согласно равенству

$$\mathcal{K}^{ik}(\mathbf{r}; \mathbf{R}; t) = \langle v^i(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2, 0) v^k(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2, t) \rangle \quad (9.2)$$

### 9-1.1.1 Корреляционные функции в лагранжевой системе координат

Определение (9.2) написано в эйлеровой системе координат. Такая корреляционная функция даёт ответ на вопрос, что происходит в выделенном элементе объёма.

Но отдельный интерес представляет вопрос о том, как со временем ведёт себя выделенная частица или элемент жидкости. Для ответа на этот вопрос следует перейти в лагранжеву систему координат: по определению, начало лагранжевой системы координат движется вместе с некоторой выделенной частицей жидкости. Скорость движения начала лагранжевой системы относительно неподвижной системы координат обозначим  $\mathbf{V}(t)$ , а поле скорости жидкости в этой системе координат —  $\mathbf{v}_L(t, \mathbf{r})$ :

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{R}(t)) \equiv \mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad (9.3a)$$

$$\mathbf{v}_L(t, \mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(t, \mathbf{r} + \mathbf{R}(t)) - \mathbf{V}(t),$$

где  $\mathbf{R}(t)$  есть траектория лагранжевой частицы. Таким образом, поле скорости  $\mathbf{v}_L(\mathbf{r})$ , записанное в лагранжевой системе координат таково, что, в частности,  $\mathbf{v}_L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Первым примером корреляционной функции для выделенной лагранжевой частицы является парная корреляционная функция скорости движения этой частицы,

$$\mathcal{K}_L^{ik}(t) = \langle V^i(0) V^k(t) \rangle. \quad (9.3b)$$

Корреляционная функция (9.3a) описывает, как во времени изменяется скорость частицы. Время, на котором существенно убывает  $\mathcal{K}_L^{ik}(t)$  есть время, в течении которого лагранжева частица движется в одном направлении. Амплитуда  $\mathcal{K}_L^{ii}(0)$  есть средний квадрат скорости движения.

Для того, чтобы описать течение в некоторой окрестности лагранжевой траектории, следует рассмотреть структурную функцию в лагранжевой системе отсчёта

$$\mathcal{S}_L^{ik}(\tau, \mathbf{r}) = \langle v_L^i(t, \mathbf{R}) v_L^k(t + \tau, \mathbf{R} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (9.3c)$$

Здесь подразумевается локальная однородность статистики в пространстве. В частности, структурная функция (9.3c) определяет перемешивание в потоке, задавая тензор диффузии (10.6k).

## §9-2. Парная корреляционная функция

В этом пункте мы предполагаем, что статистические свойства поля скорости случайного течения однородны и изотропны в пространстве. Отдельно мы будем рассматривать вариант, когда, кроме того, есть симметрия статистических свойств относительно операции пространственной инверсии.

Поскольку случайный поток статистически однороден, то имеет смысл рассматривать статистические свойства потока в Фурье-представлении. Фурье-компоненту скорости определим как

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \equiv \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \int d^d r \mathbf{v}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (9.4a)$$

где  $\mathcal{V}$  — объём системы. Обратное Фурье-преобразование записывается в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sqrt{\mathcal{V}} \int (d^d k) \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (9.4b)$$

Мы отдельно будем интересоваться несжимаемым течением, для которого  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . В Фурье-представлении условие несжимаемости имеет вид

$$(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k})) = 0. \quad (9.4c)$$

### 9-2.1 Парная корреляционная функция

В случае однородной в пространстве статистики поля скорости корреляционная функция зависит только от

разности координат её точек, см. (9.1c). Добавив инвариантность по отношению к пространственной инверсии  $P$ , получим, что парная корреляционная функция симметричная по векторным индексам,

$$\mathcal{K}^{ik}(\mathbf{r}) = \mathcal{K}^{ki}(-\mathbf{r}) \stackrel{P}{=} \mathcal{K}^{ki}(\mathbf{r}). \quad (9.5a)$$

Действительно, при операции пространственной инверсии относительно точки  $\mathbf{R}$  в (9.2) следует сделать замену  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ , которая равносильна перестановке  $i \leftrightarrow k$ , см. (9.1b). Кроме того, верно равенство

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r_1^\alpha} \langle v^i(\mathbf{r}_1) v^k(\mathbf{r}_2) \rangle &= \frac{\partial}{\partial r_2^\alpha} \langle v^i(\mathbf{r}_1) v^k(\mathbf{r}_2) \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \mathcal{K}^{ik}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \end{aligned} \quad (9.5b)$$

Чтобы убедиться в последнем равенстве, можно проделать вычисления в обратном порядке, подставив  $\mathcal{K}^{ji}(\mathbf{r})$  в виде (9.1a). Для удобства выпишем здесь связь между координатами и производными:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, & \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \partial_{1i} &= \frac{1}{2} \partial_{Ri} - \partial_i, & \partial_{2i} &= \frac{1}{2} \partial_{Ri} + \partial_i. \end{aligned} \quad (9.5c)$$

Теперь исследуем свойства структурной функции второго порядка. С учётом установленной симметрии корреляционной функции (9.5a), общее определение

структурной функции (9.1e) упрощается до вида

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{ik}(\mathbf{r}) &= 2\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{0}) - (\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{r}) + \mathcal{K}^{ji}(\mathbf{r})) \underset{\text{P}}{=} \\ &\underset{\text{P}}{=} 2(\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{0}) - \mathcal{K}^{ij}(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (9.5d)$$

Напомним, что структурная функция обладает симметриями (9.1f). Кроме того, если предположить несжимаемость течения,  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , то из (9.1b, 9.5b) следует, что

$$\partial_i \mathcal{K}^{ik} = \partial_k \mathcal{K}^{ik} = 0, \quad \Rightarrow \quad \partial_i \mathcal{S}^{ik} = 0. \quad (9.5e)$$

### 9-2.1.1 Структурная функция в случае изотропной статистики и бездивергентного поля

Пусть скорость бездивергентна, а её статистика изотропна в пространстве. Тогда мы приходим к требованию, чтобы с точки зрения векторной структуры  $\mathcal{S}^{ik}$  являлась линейной комбинацией  $r^2 \delta^{ik}$  и  $r^i r^k$ :

$$\mathcal{S}^{ik} = A(r) \delta^{ik} + B(r) n^i n^k, \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}/r,$$

где  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор, направленный от точки №1 к точке №2. С учётом уже выписанных ограничений (9.5e), структурная функция скорости может быть параметризована с помощью одной скалярной функции  $\mathcal{Q}$ , зависящей только от модуля вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{ik}(\mathbf{r}) &= ((d+1)r^2 \delta^{ik} - 2r^i r^k) \mathcal{Q}'(r)/r^3 + \\ &+ (r^2 \delta^{ik} - r^i r^k) r \partial_r (\mathcal{Q}'(r)/r^3). \end{aligned} \quad (9.5f)$$

Выполнение условия несжимаемости течения (9.5e) проще всего проверить непосредственным вычислением. Конкретный выбор функции  $\mathcal{Q}$  объясняется стремлением потом получить простое выражение (9.5j).

С точки зрения геометрической интерпретации удобна также другая параметризация структурной функции, в данном случае парной. Пусть  $\boldsymbol{\tau}$  — любой единичный вектор, нормальный к  $\mathbf{n}$ . Структурная функция обладает, в частности, симметрией относительно вращения вокруг вектора  $\mathbf{n}$ . Поэтому ненулевыми матричными элементами являются только

$$S^{rr} = (d-1)\mathcal{Q}'/r \quad (9.5g)$$

$$S^{\tau\tau} = (d+1)\mathcal{Q}'/r + r^3 \partial_r \frac{\mathcal{Q}'}{r^3} = \frac{\partial_r (r^{d-1} S^{rr})}{(d-1)r^{d-2}}.$$

### 9-2.1.2 Корреляционная функция в Фурье-пространстве

Связь между Фурье-образом

$$\mathcal{K}_{\mathbf{k}}^{ij} = \int d^d r \mathcal{K}^{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (9.5h)$$

корреляционной функции и средне-квадратичным от Фурье-образа  $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$  (9.4a) поля скорости имеет вид:

$$\langle v_{-\mathbf{q}}^i v_{\mathbf{k}}^j \rangle = (2\pi)^d \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \mathcal{K}_{\mathbf{k}}^{ij}.$$

При этом значение  $\delta$ -функции в нуле равно объёму системы  $\mathcal{V}$ . Фурье-образ структурной функции и её связь с фурье-образом корреляционной функции суть

$$\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^{ij} \equiv \int d^d r (\mathcal{S}^{ij}(\mathbf{r}) - 2\mathcal{K}^{ij}(\mathbf{0})) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = -\mathcal{K}_{\mathbf{k}}^{ij} - \mathcal{K}_{\mathbf{k}}^{ji}. \quad (9.5i)$$

Вычитание мы произвели для того, чтобы подинтегральная функция стремилась к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , смотри (9.5d).

Для изотропного случая возможно представление (9.5f), которое при Фурье-преобразовании (9.5i) приводит к выражению

$$\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^{ij} = -(k^2 \delta^{ij} - k^i k^j) \tilde{\mathcal{Q}}(k). \quad (9.5j)$$

где

$$\tilde{\mathcal{Q}}(k) = \int d^d r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathcal{Q}(r).$$

То, что (9.5j) верно, можно проверить так: выполнить обратное преобразование Фурье над  $\tilde{\mathcal{S}}^{ii}(k)$  и сравнить результат с  $\mathcal{S}^{ii}(r)$ , полученным непосредственно из (9.5f).

### 9-2.1.3 Энергетический спектр

Полная кинетическая энергия, запасённая в жидкости, равна

$$E = \frac{\rho}{2} \int d^3 r v^2(\mathbf{r}). \quad (9.6a)$$

Если воспользоваться пространственной однородностью статистики скорости и перейти к Фурье-компонентам, то полная кинетическая энергия переписется в виде

$$E = \frac{\rho V}{2} \int d^3 k \mathcal{K}^{ii}(\mathbf{k}). \quad (9.6b)$$

Если статистика скорости к тому же изотропна, то полную энергию имеет смысл представить как интеграл по абсолютному значению волнового вектора, таким образом разделив интегрирование в (9.6b) на интегрирование по углам и интегрирование по абсолютному значению:

$$E = \int_0^\infty dk E_k, \quad E_k = \frac{\sigma_d}{2(2\pi)^d} k^{d-1} \mathcal{K}^{ii}(k), \quad (9.6c)$$

$$= -\frac{\sigma_d}{4(2\pi)^d} k^{d-1} \mathcal{S}^{ii}(k),$$

где  $\sigma_d$  — площадь  $d$ -мерной единичной сферы ( $\sigma_2 = 2\pi$ ,  $\sigma_3 = 4\pi$ ), а в последнем равенстве мы использовали соотношение (9.5i).

## 9-2.2 Разделение поля скорости по масштабам

В случае изотропной статистики нам будет удобно разделить полное поле скорости на крупномасштабную часть  $\mathbf{v}_K^<(\mathbf{r})$ , имеющую волновые вектора  $|\mathbf{k}| < K$ , и на мелкомасштабную часть  $\mathbf{v}_K^>(\mathbf{r})$ , у которой волновые вектора  $|\mathbf{k}| > K$ . Здесь  $K$  — некоторое наперёд заданное волновое число. Итак,

$$\mathbf{v}_K^<(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{k}| < K} (d^d k) \mathbf{v}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}_K^> = \mathbf{v} - \mathbf{v}_K^<. \quad (9.7a)$$

Отметим, что, если полная скорость была бездивергентна, то и две её части также являются бездивергентными:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 : \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_K^> = \operatorname{div} \mathbf{v}_K^< = 0. \quad (9.7b)$$

Энергия, запасённая в крупномасштабных модах, является проекцией корреляционной функции скорости на крупные масштабы:

$$E_K^< = \frac{1}{2} \langle (\mathbf{v}_K^<)^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}| < K} (d^d k) \mathcal{K}_\mathbf{k}^{ii}. \quad (9.7c)$$

## 9-2.3 Статистика поля скорости на малых масштабах

На малых масштабах основную роль в формировании течения играет вязкость, поэтому пространственный профиль скорости можно считать почти линейным, приняв для разности скоростей (9.1d)

$$\delta v_{\mathbf{R}}^k(\mathbf{r}) = \sigma^{kl}(t, \mathbf{R}) r^l, \quad (9.8a)$$

где  $\hat{\sigma}$  — матрица градиента поля скорости. Перейдём в лагранжеву систему координат, начало которой движется вместе с некоторой траекторией  $\mathbf{R}(t)$ , см. (9.3a). Тогда разложение (9.8a) вблизи начала лагранжевой системы координат переписется в виде

$$v_L^k(\mathbf{r}) = \zeta^{kl}(t) r^l, \quad \zeta^{kl}(t) = \sigma^{kl}(t, \mathbf{R}(t)). \quad (9.8b)$$

### 9-2.3.1 Структурная функция

Приближение линейности профиля поля скорости верно только до некоторого масштаба  $r_\eta$ , которым может быть, например, колмогоровский масштаб для трёхмерного турбулентного потока или размер сосуда для хаотического гладкого потока. Если мы интересуемся только такими, — малыми, — масштабами, то в таком случае нас не интересует конкретный вид корреляционной функции на масштабах, больших по сравнению с  $r_\eta$ .

На малых масштабах  $r \ll r_\eta$  в структурной функции достаточно удерживать только первые члены разложения по малому расстоянию  $r$ . Например, разновременная структурная функция (9.3c) в координатном представлении принимает вид

$$S^{ik}(\mathbf{r}, t) = \Sigma(t) ((d+1)r^2 \delta^{ik} - 2r^i r^k), \quad (9.8c)$$

где  $\Sigma(-t) = \Sigma(t)$  определяется параметрами потока. Пространственная структура (9.8c) является модельно независимой.

Точно такой же вид и общее свойство  $\Sigma_L(-t) = \Sigma_L(t)$  имеет разновременная корреляционная функция в лагранжевой системе координат:

$$\begin{aligned} S_L^{ik}(\mathbf{r}, t) &= \langle v_L^i(t', \mathbf{r}) v_L^k(t+t', \mathbf{r}) \rangle_{t'} = \\ &= \Sigma_L(t) ((d+1)r^2 \delta^{ik} - 2r^i r^k). \end{aligned} \quad (9.8d)$$

Вместо усреднения по времени можно производить усреднение по разным лагранжевым траекториям (т.е. по объёму).

### 9-2.3.2 Одноточечная корреляционная функция градиента поля скорости

Относительную динамику частиц, разделённых малым расстоянием, согласно (9.8a) определяет матрица градиентов скорости. Поэтому отдельный интерес представляет свойства случайного процесса  $\zeta(t)$ .

Среднее значение градиента скорости вследствие изотропности статистики равно нулю,  $\langle \hat{\zeta} \rangle = 0$ . Объектом, характеризующим свойства этого случайного процесса, является парная автокорреляционная функция  $\langle \hat{\zeta}(0) \hat{\zeta}(t) \rangle$ .

Изотропность статистики требует, чтобы векторная структура коррелятора собиралась из символов Кронекера:

$$\begin{aligned} \langle \zeta^{i\alpha}(0) \zeta^{k\beta}(t) \rangle &= \left( A \delta^{ik} \delta^{\alpha\beta} + B \delta^{i\alpha} \delta^{k\beta} + C \delta^{i\beta} \delta^{k\alpha} \right) + \\ &+ \left( \tilde{A} \delta^{ik} \delta^{\alpha\beta} + \tilde{B} \delta^{i\alpha} \delta^{k\beta} + \tilde{C} \delta^{i\beta} \delta^{k\alpha} \right), \end{aligned}$$

где  $A, B, C$  — чётные, а  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  — нечётные функции времени. Из однородности статистики по времени получаем, что

$$\langle \zeta^{i\alpha}(0) \zeta^{k\beta}(t) \rangle = \langle \zeta^{k\beta}(0) \zeta^{i\alpha}(-t) \rangle.$$

Следствием этого является чётность корреляционной функции по времени, т.е. равенства  $\tilde{A} = \tilde{B} = \tilde{C} = 0$ , сравни с (12.15d). Далее при рассуждениях достаточно рассматривать частный случай совпадения времён  $t = 0$ . Бездивергентность скорости накладывает условие  $\zeta^{ii} = 0$ ; непосредственное суммирование по парам индексов  $\{i, \alpha\}$  или  $\{k, \beta\}$  приводит к одному и тому же условию

$$A + dB + C = 0.$$

Наконец, условие пространственной однородности совместно с условием несжимаемости течения приводит к тому, что структурная функция должна иметь вид (9.8c), который достигается, если

$$2A = (d+1)(B+C).$$

В результате приходим к тому, что корреляционная функция параметризуется одной чётной функцией времени:

$$\begin{aligned} \langle \zeta^{i\alpha}(0) \zeta^{k\beta}(t) \rangle &= \quad (9.8e) \\ &= \Sigma_L(t) \left( (d+1) \delta^{ik} \delta^{\alpha\beta} - \delta^{i\alpha} \delta^{k\beta} - \delta^{i\beta} \delta^{k\alpha} \right), \end{aligned}$$

где  $\Sigma(t) = \Sigma(-t)$ .

В эйлеровой системе координат применимы все те же симметричные соображения, в результате чего верен тот же вид (9.8e), но функция  $\Sigma(t)$ , уже определённая в (9.8c), имеет другую зависимость от времени. Одновременные корреляционные функции, очевидно, совпадают, так что  $\Sigma_L(0) = \Sigma(0)$ .

## 9-2.4 Задачи

• **Задача 1:** Полагая, что существует логарифмически широкий интервал масштабов  $r_\eta \ll r \ll L$ , где выполняется скейлинговый закон для парной структурной функции, например,  $S^{rr} = C_r r^{\mu_r}$  (9.5g), найдите энергетический спектр  $E_k = C_e k^{-\mu_e}$  (9.6c) в интервале волновых чисел  $1/L \ll k \ll 1/r_\eta$ .

*Решение:* Соотношение (9.5g) даёт

$$S^{ii} = S^{rr} + (d-1)S^{\tau\tau} = (d + \mu_r)C_r r^{\mu_r}. \quad (9.9a)$$

Далее следует воспользоваться соотношением (9.6c), для чего надо взять Фурье-образ от  $S^{ii}(r)$ , см. (9.5i):

$$S^{ii}(k) = \int d^d r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} S^{ii}(r). \quad (9.9b)$$

Поскольку, как мы увидим ниже, основной вклад в интегрирование дают масштабы  $r \ll L$ , то функцию  $S^{ii}(r)$  без изменения окончательного результата можно считать убывающей до нуля на масштабе  $r \sim L$ ; при этом второй вклад под интегралом в (9.5i) можно опустить. Следует также считать, что при  $r \ll r_\eta$  структурная функция быстро обращается в ноль, а волновое число лежит в интервале, где реализуется скейлинг.

Отдельно проведём вычисления для трёхмерного и двумерного случаев. В трёхмерном случае интеграл по направлениям радиус-вектора  $\mathbf{r}$  даёт

$$S^{ii}(k) = \frac{4\pi C_r (3 + \mu_r)}{k} \text{Im} \int_0^\infty r^{1+\mu_r} dr e^{ikr}. \quad (9.9c)$$

Поворачиваем контур интегрирования в комплексной плоскости  $k$  вверх вдоль мнимой оси, в результате чего получаем

$$S^{ii}(k) = -4\pi(3 + \mu_r) \sin(\pi\mu_r/2) \Gamma(2 + \mu_r) C_r k^{-3-\mu_r}. \quad (9.9d)$$

Соотношение (9.6c) даёт

$$\begin{aligned} E(k) &= C_e k^{-\mu_e}, \quad \mu_e = 1 + \mu_r, \\ \frac{C_e}{C_r} &= \frac{(3 + \mu_r) \sin(\pi\mu_r/2) \Gamma(2 + \mu_r)}{2\pi}. \end{aligned} \quad (9.9e)$$

В частности, если  $\mu_r = 2/3$ , то  $C_e/C_r \approx 0.760$ .

В двумерном поле скорости вместо (9.9c) имеем

$$S^{ii}(k) = 2\pi C_r (2 + \mu_r) \text{Re} \int_0^\infty r^{1+\mu_r} dr H_0^{(1)}(kr). \quad (9.9f)$$

где  $H^{(0)}$  — функция Ганкеля первого рода. Поворот в комплексной плоскости контура интегрирования на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки приводит к

$$S^{ii}(k) = \frac{4C_r (2 + \mu_r) \cos(\pi\mu_r/2)}{k^{1+\mu_r}} \int_0^\infty \xi^{1+\mu_r} d\xi K_0(\xi), \quad (9.9g)$$

где  $K_0$  — функция Макдональда. Оставшийся интеграл является табличным, так что

$$\begin{aligned} S^{ii}(k) &= -2^{1+\mu_r} (2 + \mu_r) \sin\left(\frac{\pi\mu_r}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{1 + \mu_r}{2}\right) \\ &\cdot C_r k^{-1-\mu_r}. \end{aligned} \quad (9.9h)$$

Окончательный ответ с учётом (9.6c)

$$\begin{aligned} E(k) &= C_e k^{-\mu_e}, \quad \mu_e = 1 + \mu_r, \\ \frac{C_e}{C_r} &= \frac{(2 + \mu_r) \sin(\pi\mu_r/2) \Gamma^2((1 + \mu_r)/2)}{\pi 2^{2-\mu_r}}. \end{aligned} \quad (9.9i)$$

В частности, если  $\mu_r = 2/3$ , то  $C_e/C_r \approx 0.372$ .

• **Задача 2:** Пусть случайное поле скорости трёхмерно и статистически изотропно, но его измерение производится в некоторой плоскости, и измеряются только две компоненты скорости, лежащие в этой плоскости. Полагая, что существует логарифмически широкий интервал масштабов  $r_\eta \ll r \ll L$ , где выполняется скейлинговый закон для парной структурной функции, например,  $S^{rr} = C_r r^{\mu_r}$  (9.5g), найдите префактор в измеренном таким образом энергетическом спектре  $\tilde{E}_k = \tilde{C}_e k^{-1-\mu_r}$  в интервале волновых чисел  $1/L \ll k \ll 1/r_\eta$ . Построение корреляционных функций производится на основании только двумерной информации, не производится её дополнение третьим направлением. Таким образом, хотя в (9.5g) надо считать  $d = 3$ , но в соотношениях (9.5i, 9.6c) надо считать  $d = 2$ .

*Решение:* Вместо (9.9a) имеем

$$S^{\alpha\alpha} = S^{rr} + S^{\tau\tau} = (2 + \mu_r/2) C_r r^{\mu_r}. \quad (9.9j)$$

где  $\alpha$ -компоненты лежат в плоскости измерения. Далее вычисления должны проводиться по тому же пути, по которому они проводились для двумерного течения, см. (9.9f–9.9h). Вместо (9.9i) потому имеем

$$\frac{\tilde{C}_e}{C_r} = \frac{(2 + \mu_r/2) \sin(\pi\mu_r/2) \Gamma^2((1 + \mu_r)/2)}{\pi 2^{2-\mu_r}}. \quad (9.9k)$$

В частности, если  $\mu_r = 2/3$ , то  $\tilde{C}_e/C_r \approx 0.325$ . По сравнению с обычным спектром (9.9e)  $\tilde{C}_e/C_e \approx 0.423$ .

### §9-3. Корреляционная функция третьего порядка

Примем, что статистика поля скорости однородна в пространстве и инвариантна по отношению к операции пространственной инверсии  $P$ . Кроме того, нет среднего течения, так что

$$\langle \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (9.10a)$$

В теории турбулентности важную роль играет структурная функция третьего порядка. Здесь мы установим её симметричные свойства. По определению, структурная функция третьего порядка

$$S^{ikl}(\mathbf{r}) = \langle \delta v^i \delta v^k \delta v^l \rangle, \quad \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad (9.10b)$$

сравни с (9.1e). Нижние индексы '1' и '2' соответствуют точкам  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  соответственно. Структурную функцию  $S^{ikl}$  можно выразить через корреляционную функцию третьего порядка  $\mathcal{K}^{ikl}(\mathbf{r})$ , у которой две из трёх точек совпадают:

$$\mathcal{K}^{ikl}(\mathbf{r}) = \langle v_1^i v_1^k v_2^l \rangle, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (9.10c)$$

По построению, эта корреляционная функция симметрична по первым двум индексам. При операции инверсии, не меняющей статистику течения, меняет знак как  $\mathbf{r}$ , так и скорость  $\mathbf{v}$ , поэтому  $\mathcal{K}^{ikl}$  антисимметричен по своему аргументу  $\mathbf{r}$ :

$$\mathcal{K}^{ikl}(\mathbf{r}) = \mathcal{K}^{kil}(\mathbf{r}) = -\mathcal{K}^{ikl}(-\mathbf{r}). \quad (9.10d)$$

В частности, отсюда следует, что среднее значение от третьей степени скорости в любой точке пространства равно нулю — т.е.  $\mathcal{K}^{ikl} = 0$  при  $\mathbf{r} = 0$ . Используя установленные симметрии корреляционной функции, находим выражение для структурной функции:

$$S^{ikl}(\mathbf{r}) = 2(\mathcal{K}^{ikl} + \mathcal{K}^{kl i} + \mathcal{K}^{il k}) \quad (9.10e)$$

#### 9-3.1 Изотропная статистика

Теперь примем вдобавок, что статистика поля скорости изотропна в пространстве. Сам поток будем считать несжимаемым.

Вследствие изотропности статистики течения корреляционная функция как тензор может определяться только вектором  $\mathbf{r}$ , то есть должна иметь вид

$$\mathcal{K}^{ikl}(\mathbf{r}) = A(\delta^{il} r^k + \delta^{kl} r^i) + B\delta^{ik} r^l + C \frac{r^i r^k r^l}{r^2}. \quad (9.11a)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются функциями абсолютного значения  $\mathbf{r}$ . Между этими коэффициентами можно установить связь, воспользовавшись условием несжимаемости течения: в терминах (9.10c) условие бездивергентности принимает вид

$$\nabla_{2l} \mathcal{K}^{ikl} = \nabla_{r l} \mathcal{K}^{ikl} = 0.$$

сравни с (9.5b). Подставим в это равенство параметризацию (9.11a) и соберём слагаемые отдельно при  $\delta^{ik}$  и  $r^i r^k$ :

$$2A + (d + r\partial_r)B = 0, \quad 2r\partial_r A + (d + r\partial_r)C = 0$$

где  $d$  — размерность пространства. Из этих уравнений можно получить, что

$$\partial_r (r^d (2A + dB + C)) = 0 \Leftrightarrow 2A + dB + C = 0$$

Мы учли, что, поскольку при разведении точек корреляционной функции на бесконечность её значение стремится к нулю, то в решении выписанного уравнения константу интегрирования надо брать равной нулю. В результате остаётся только одна неизвестная функция расстояния  $B(r)$ ,

$$C = r\partial_r B, \quad A = -\frac{d}{2}B - \frac{1}{2}r\partial_r B, \quad (9.11b)$$

параметризующая корреляционную функцию третьего порядка согласно равенству

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{ikl}(\mathbf{r}) = & -\frac{dB + r\partial_r B}{2} (\delta^{il} r^k + \delta^{kl} r^i) + \\ & + B\delta^{ik} r^l + \partial_r B \frac{r^i r^k r^l}{r}. \end{aligned} \quad (9.11c)$$

##### 9-3.1.1 Параметризация структурной функции

Из общей связи между структурной и корреляционной функциями (9.10e), вида корреляционной функции для изотропной статистики (9.11a) и найденных связей между коэффициентами (9.11b) получаем, что структурная функция

$$\begin{aligned} S^{ikl} = & 6r\partial_r B \cdot \frac{r^i r^k r^l}{r^2} - \\ & - 2((d-1) + r\partial_r)B \cdot (\delta^{ik} r^l + \delta^{il} r^k + \delta^{kl} r^i). \end{aligned} \quad (9.11d)$$

Тогда как функция  $B(r)$  не имеет простого геометрического смысла, компоненты структурной функции  $S^{ikl}$  имеют более ясную геометрическую интерпретацию. Рассуждения, аналогичные приведшим к (9.5g), показывают, что у структурной функции третьего порядка имеется только два независимых матричных элемента

$$S^{rrr} = \langle (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^3 \rangle, \quad S^{r\tau\tau} = \langle (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (\delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})^2 \rangle, \quad (9.11e)$$

Из (9.11d) следует, что

$$S^{rrr} = -6(d-1)rB, \quad (9.11f)$$

$$S^{r\tau\tau} = -2r^{3-d}\partial_r (r^{d-1}B) = \frac{\partial_r (r^{d-2}S^{rrr})}{3(d-1)r^{d-3}},$$

сравни с (9.5g).

Ниже нам потребуется также вычислить выражение  $\partial_k S^{iik}$ , выразив его через  $S^{rrr}$ . Имеем с учётом (9.11f):

$$\begin{aligned} \partial_k S^{iik} &= -2(d-1) \partial_k (r^k (r \partial_r + d + 2) B) = \\ &= \frac{1}{3} (r \partial_r + d) (r \partial_r + d + 2) \frac{S^{rrr}}{r}. \end{aligned} \quad (9.11g)$$

### 9-3.2 Двумерное поле скорости

В этом пункте мы установим свойства корреляционных функций, специфические для двумерного течения. Течение будем считать несжимаемым. Статистику течения будем считать аксиально-симметричной и инвариантно относительно операции зеркальной симметрии.

Напомним, что для двумерного течения завихренность  $\varpi$  является псевдо-скаляром. Определим парную корреляционную функцию завихренности

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}) = \langle \varpi_1 \varpi_2 \rangle. \quad (9.12a)$$

#### 9-3.2.1 Корреляционная функция третьего порядка

При исследовании статистики завихренности появляются корреляционные функции типа  $\mathbf{v}-\varpi-\varpi$ , в которых

две из трёх точек совпадают. Установим свойства таких средних. Во-первых заметим, что среднее

$$\langle v_1^i (\varpi_2)^2 \rangle = 0 \quad (9.12b)$$

равно нулю. Действительно, это среднее является вектором, поэтому должно иметь вид  $A(r)r^i$  и обращаться в нуль при  $r = 0$ . С другой стороны, в силу бездивергентности скорости  $\partial_i (Ar^i) = 0$ , то есть  $Ar^i \propto r^i/r^2$ . Для того, чтобы среднее обращалось в ноль в совпадающих точках, коэффициент пропорциональности должен быть равен нулю.

Таким образом, единственным объектом является

$$\mathcal{K}_{\varpi}^i(\mathbf{r}) = \langle \varpi_1 v_2^i \varpi_2 \rangle = -\mathcal{K}_{\varpi}^i(-\mathbf{r}). \quad (9.12c)$$

Если мы, по аналогии с (9.10b), определим

$$\delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (9.12d)$$

то структурная функция третьего порядка

$$S_{\varpi}^i(\mathbf{r}) \equiv \langle (\delta\omega)^2 \delta v^i \rangle = -4\mathcal{K}_{\varpi}^i(\mathbf{r}). \quad (9.12e)$$

Поскольку  $S_{\varpi}^i(\mathbf{r})$  есть вектор, а статистика принята изотропной, то единственным ненулевым элементом структурной функции является  $S_{\varpi}^r(\mathbf{r})$ .

## §9-4. Трёхмерный турбулентный поток

Уравнение Навье-Стокса с внешней вынуждающей силой для несжимающейся жидкости имеет вид

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P / \rho + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} / \rho. \quad (9.13)$$

Внешняя сила  $\mathbf{f}$  поддерживает течение, обеспечивая в статистическом смысле стационарность потока. Несжимаемость течения предполагает выполнение условия

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \Delta P = -\partial_i v^k \partial_k v^i - \frac{\operatorname{div} \mathbf{f}}{\rho}. \quad (9.14)$$

### 9-4.1 Размерные оценки для турбулентного каскада

Пусть характерный масштаб внешней силы  $\mathbf{f}$  есть  $L$ . Область течения не меньше чем  $L$ , но вообще говоря может и существенно превышать этот масштаб. По амплитуде сила  $\mathbf{f}$  на столько большая, что возбуждает течение, характеризующееся высоким числом Рейнольдса,

$$\operatorname{Re} \gg 1, \quad (9.15a)$$

которое (напомни, см. (3.1a)) определяется как отношение инерционного (адвекционного) и вязкого членов в уравнении Навье-Стокса,

$$\operatorname{Re} \sim \frac{|(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}|}{\nu |\Delta \mathbf{v}|}. \quad (9.15b)$$

Великость числа Рейнольдса означает, что на масштабах порядка  $L$  можно пренебречь вязким членом в уравнении Навье-Стокса.

Для большого числа Рейнольдса почти любое стационарное течение оказывается неустойчивым. Сейчас мы рассматриваем случай общего положения, когда течение представляет собой хаотически меняющийся во времени поток. Мы интересуемся статистически стационарным режимом этого потока.

Вязкий член в уравнении Навье-Стокса играет роль только на малых масштабах. Обозначим характерный масштаб действия вязких сил  $r_\eta \ll L$ , этот масштаб часто называют колмогоровским.

**Предположение о локальности нелинейного взаимодействия по масштабам.** Вообще говоря, поле скорости хаотического потока содержит в себе все масштабы (в смысле разложения в ряд Фурье). Рассмотрим промежуточный масштаб  $\lambda$ ,

$$r_\eta \ll \lambda \ll L. \quad (9.15c)$$

Благодаря нелинейному адвекционному члену в уравнении Навье-Стокса, пульсации скорости с масштабом  $\lambda$ , обозначим их  $\mathbf{v}_\lambda$ , будут нелинейно взаимодействовать

между собой, с большими масштабами и меньшими масштабами. Сейчас мы сделаем предположение (оправдывающееся для широкого класса течений) о том, что взаимодействие с большими и меньшими масштабами мало по сравнению с взаимодействием внутри масштаба  $\lambda$ .

Поясним, чем именно мы пренебрегаем. Во-первых, отдельно стоит нелинейное взаимодействие пульсации масштаба  $\lambda$  с большими масштабами, сводящееся в переносу пульсация масштаба  $\lambda$  как целое. Такой перенос определяется вкладом в уравнение Навье-Стокса вида

$$(\mathbf{v}_L \nabla) \mathbf{v}_\lambda. \quad (9.15d)$$

Здесь  $\mathbf{v}_L$  — часть поля скорости, в которой удержаны масштабы порядка  $L$  (или просто существенно больше по сравнению с выделенным масштаб  $\lambda$ ). Вклад (9.15d) в (9.13) не требует пренебрежения, поскольку он не изменяет локальную конфигурацию поля скорости на масштабах  $\lambda$ , перенося его как целое. Мы считаем выполненным сильное неравенство

$$(\mathbf{v}_L \nabla) \mathbf{v}_L \ll (\mathbf{v}_\lambda \nabla) \mathbf{v}_\lambda \quad (9.15e)$$

и поэтому пренебрегаем вкладами типа  $(\mathbf{v}_\lambda \nabla) \mathbf{v}_L$ . Вкладами типа  $(\mathbf{v}_\lambda \nabla) \mathbf{v}_\eta$ , где  $\mathbf{v}_\eta$  — скорость на масштабе  $r_\eta$  (или просто на масштабе, существенно меньшем  $\lambda$ ), мы пренебрегаем, поскольку эти нелинейные вклады в уравнение Навье-Стокса имеют волновые вектора, соответствующие малому масштабу  $r_\eta$ .

**Изотропизация статистики.** Поскольку непосредственное нелинейное взаимодействие промежуточного масштаба  $\lambda$  с большими масштабами мало, то мы можем ожидать, что статистика пульсаций поля скорости  $\mathbf{v}_\lambda$  является изотропной. Ниже мы развиваем теорию в предположении изотропности статистики, по крайней мере на масштабах существенно меньше масштаба возбуждения течения  $L$ .

## 9-4.2 Инерционный интервал

Итак, на масштабах  $\lambda$ , значительно превышающих масштаб Колмогорова,  $\lambda \gg r_\eta$ , вязкость пренебрежимо мала. В таком случае имеет место закон сохранения кинетической энергии. Мы имеем дело с потоковым состоянием, когда сила  $\mathbf{f}$  постоянно передаёт течению ещё кинетическую энергию. Пусть в среднем эта передача характеризуется мощностью на единицу объёма

$$\frac{1}{\rho} \langle (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \rangle = \epsilon, \quad [\epsilon] = \frac{\text{см}^2}{\text{с}^3}. \quad (9.15f)$$

Поскольку мы рассматриваем статистически стационарный поток, то энергия, приходящая в этот потоке через действие возбуждающей силы  $\mathbf{f}$ , в среднем нигде в течении не накапливается. Тогда единственной возможностью является передача мощности  $\epsilon$  по масштабам, от масштаба  $\sim L$  до колмогоровского масштаба  $\sim r_\eta$ , где

эта мощность выделяется в тепло. Поскольку мы приняли локальное взаимодействие по масштабам, то передача мощности должна осуществляться по цепочке.

Таким образом, мы пришли к концепции *инерционного интервала*, реализующегося на масштабах (9.15c). В инерционном интервале происходит локальное по масштабам взаимодействие турбулентных пульсаций, передающих по цепочке от самых больших масштабов к самым маленьким мощность  $\epsilon$ . Из этой картины следует, что амплитуда турбулентных пульсаций  $v_\lambda$  на масштабе  $\lambda$  определяется только им самим и величиной мощности  $\epsilon$ . Размерный анализ даёт

$$v_\lambda \sim (\epsilon \lambda)^{1/3}. \quad (9.15g)$$

Этот скейлинговый закон носит имя Колмогорова-Обухова. Градиент скорости оценивается как

$$|\nabla \mathbf{v}| \sim \frac{v_\lambda}{\lambda} \sim \frac{\epsilon^{1/3}}{\lambda^{2/3}}. \quad (9.15h)$$

Градиент скорости убывает с масштабом, что оправдывает сделанное предположение о знаке неравенства (9.15e).

Поле давления нелокально зависит от поля скорости, поскольку давление связано со скоростью уравнением Пуассона (2.12f). Однако нелокальность оставляет соответствие масштабов: основной вклад в вариацию давления  $P_\lambda$  на масштабе  $\lambda$  вносит часть поля скорости  $\mathbf{v}_\lambda$  на этом же масштабе [Hill & Wilczak, 1995, Eqs. (42)]:

$$P_\lambda \sim \rho v_\lambda^2 \sim \rho (\epsilon \lambda)^{2/3}. \quad (9.15i)$$

Вариация давления определяет вариацию плотности в слабо сжимаемой изотермической жидкости, вызванные турбулентным потоком.

**Число Рейнольдса.** В развитом турбулентном потоке интервал масштабов (9.15c) весьма большой, так что определение числа Рейнольдса согласно (9.15b) является недоопределённым. Действительно, если в дроби (9.15b) оценивать числитель и знаменатель по абсолютному значению, принимая во внимание вклад всех масштабов, то согласно скейлингу (9.15g) и тот и другой будут определять самым маленьким масштабом  $r_\eta$ . Тогда как на этом масштабе, по определению, число Рейнольдса порядка единицы. Вместе с тем, сила турбулентного потока определяется, наоборот, самыми крупными масштабами.

Поэтому число Рейнольдса имеет смысл определять отдельно для каждого масштаба:

$$\text{Re}_\lambda \sim \frac{(\mathbf{v}_\lambda \nabla) \mathbf{v}_\lambda}{\nu \Delta v_\lambda} \sim \frac{\lambda v_\lambda}{\nu} \sim \frac{\epsilon^{1/3} \lambda^{4/3}}{\nu}. \quad (9.15j)$$

Просто число Рейнольдса  $\text{Re}$ , которое и имелось в виду при формулировке определения (9.15b), соответствует самому крупному масштабу  $L$  (его называют *интегральным масштабом*):

$$\text{Re} = \frac{\epsilon^{1/3} L^{4/3}}{\nu} : \quad \text{Re}_\lambda = \left( \frac{\lambda}{L} \right)^{4/3} \text{Re}. \quad (9.15k)$$

На масштабе Колмогорова  $r_\eta$  число Рейнольдса по определению равно единице, то есть

$$r_\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} = \text{Re}^{-3/4}L. \quad (9.15l)$$

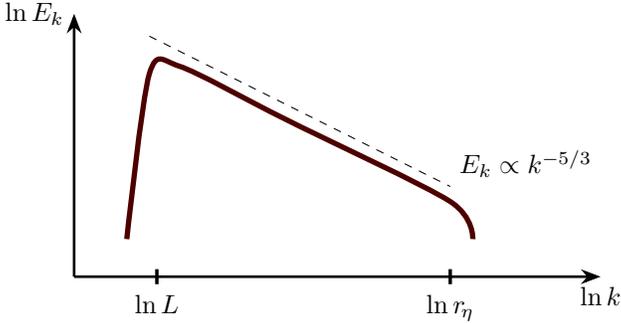


Рис. 9.1 Качественный вид спектра энергии в трёх-мерном развитом турбулентном потоке.

**Энергетический спектр.** Рассчитаем на основе скейлингового закона (9.15g) спектр кинетической энергии (9.6с). Волновое число  $k$  в (9.6с) следует оценивать как  $k \sim 1/\lambda$ . Объёмная плотность энергии, заключённой на масштабе  $\lambda$ , оценивается как

$$E_k \cdot k \sim v_\lambda^2, \quad \Rightarrow \quad E_k = C_e \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (9.15m)$$

где  $C_e$  — феноменологическая константа, которая предполагается независимой от деталей возбуждения тече-

ния на интегральном масштабе  $L$ . Спектр (9.15m) изображён на Рис. 9.1. Полная кинетическая энергия течения на единицу массы (удельная кинетическая энергия) определяется самым большим масштабом  $L$ ,

$$E = \int_0^\infty dk E_k \sim v_L^2 \sim (\epsilon L)^{2/3}. \quad (9.15n)$$

#### 9-4.2.1 Разбегание двух лагранжевых траекторий.

Две лагранжевы траектории, лагранжевы частицы которых в данный момент разделены расстоянием  $\lambda$ , расходятся в среднем согласно уравнению

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim v_\lambda \sim \epsilon^{1/3} \lambda^{1/3}. \quad (9.15o)$$

Скорость разбегания траекторий увеличивается с расстоянием между ними. Из (9.15o) получаем закон возрастания расстояния между двумя лагранжевыми частицами:

$$\lambda \sim \epsilon^{1/2} t^{3/2}. \quad (9.15p)$$

Было предположено, что начальное расстояние  $\lambda_0$  между лагранжевыми частицами мало по сравнению с текущим,  $\lambda_0 \ll \lambda$ , а время  $t$  отсчитывается от момента, когда расстояние было равно  $\lambda_0$ . Закон разбегания двух лагранжевых частиц (9.15p) называется законом Ричардсона [Richardson, 1926], см. также [Batchelor, 1950].

## §9-5. Точные результаты в теории развитой трёх-мерной турбулентности

Снова вернёмся к уравнению Навье-Стокса (9.13). Будем считать силу  $\mathbf{f}$  случайной, являющейся статистически однородной в пространстве и обладающей некоторой длиной корреляции  $L$ .

Заметим сперва, что кинетическая энергия действительно сохраняется внутри инерционного интервала. Согласно общему уравнению на изменения локальной плотности кинетической энергии течения (2.14b)

$$\epsilon - \partial_t E = \nu \langle \partial_i v^k \partial_i v^k \rangle = \quad (9.16)$$

$$= \nu \langle \varpi^2 \rangle = \frac{\nu}{2} \langle (\partial_i v^k + \partial_k v^i)(\partial_i v^k + \partial_k v^i) \rangle.$$

где средняя плотность кинетической энергии

$$E = \frac{\langle \mathbf{v}^2 \rangle}{2}. \quad (9.17)$$

Благодаря условию несжимаемости течения скорость вязкой диссипации в (9.16) может быть переписана как через симметризованную часть градиента скорости, см. (2.10е), так и через его антисимметричную часть, то есть через завихренность  $\varpi$ .

При усреднении все полные пространственные производные (2.14b) обратились в ноль — т.е. в (9.16) обратились в ноль как вклад от нелинейного члена в уравнении Навье-Стокса, так и от давления. Это и есть свидетельство того, что нелинейное взаимодействие на масштабах внутри инерционного интервала не изменяет кинетической энергии.

#### 9-5.1 Соотношение Кармана-Ховарда-Монина

Обобщим уравнение на средний баланс энергии следующим образом. Посчитаем временную производную от свёртки одновременной парной корреляционной функции. Это позволит нам выявить передачу энергии между разными масштабами в турбулентном течении. Ис-

пользуя уравнение Навье-Стокса (9.13), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_t \mathcal{K}^{ii}(\mathbf{r})}{2} &\equiv \frac{\partial_t \langle v_1^i v_2^i \rangle}{2} = & (9.18a) \\ &= -\frac{\partial_{1k} \langle v_1^i v_1^k v_2^i \rangle + \partial_{2k} \langle v_1^i v_2^k v_2^i \rangle}{2} + \\ &+ \frac{\langle \mathbf{v}_1 \mathbf{f}_2 \rangle + \langle \mathbf{f}_1 \mathbf{v}_2 \rangle}{2\rho} - \frac{\partial_{1i} \langle v_2^i P_1 \rangle + \partial_{2i} \langle v_1^i P_2 \rangle}{2\rho} + \\ &+ \frac{\nu(\Delta_2 + \Delta_1) \langle v_1^i v_2^i \rangle}{2}. \end{aligned}$$

Нижние индексы '1' и '2' соответствуют точкам  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  соответственно, вектор между точками  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .

Преобразуем сначала вторую строчку в (9.18a). Во-первых, в силу симметрий корреляционной функции третьего порядка (9.10d) эту строчку можно переписать в виде

$$-\frac{\partial_{1k} \langle v_1^i v_1^k v_2^i \rangle + \partial_{2k} \langle v_1^i v_2^k v_2^i \rangle}{2} = \partial_k \mathcal{K}^{ik i}$$

Во-вторых, вычислим дивергенцию следа структурной функции третьего порядка, используя её связь (9.10e) с корреляционной функцией:

$$\partial_k S^{iik} = 4\partial_k \mathcal{K}^{ik i}, \quad (9.18b)$$

где мы воспользовались равенством  $\partial_k \mathcal{K}^{iik} = 0$ , вытекающим из условия несжимаемости течения. Итак, вторая строчка в (9.18a) принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial_{1k} \langle v_1^i v_1^k v_2^i \rangle + \partial_{2k} \langle v_1^i v_2^k v_2^i \rangle}{2} &= & (9.18c) \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \langle (\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}))^2 \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \frac{1}{4} \partial_k S^{iik}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь однородностью статистики в пространстве, мы можем переписать слагаемое в (9.18a), содержащее силу, в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_f(\mathbf{r}) &= \frac{\langle \mathbf{v}_1 \mathbf{f}_2 \rangle + \langle \mathbf{f}_1 \mathbf{v}_2 \rangle}{2\rho} = & (9.18d) \\ &= \left\langle \mathbf{v}(\mathbf{R}) \frac{\mathbf{f}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{R} - \mathbf{r})}{2\rho} \right\rangle, \end{aligned}$$

Слагаемое в (9.18a), содержащее давление, равно нулю в силу несжимаемости поля скорости и однородности статистики в пространстве. Действительно, например

$$\begin{aligned} \partial_{1i} \langle v_2^i P_1 \rangle &= -\partial_{\mathbf{r}_i} \langle v^i(\mathbf{R}) P(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \rangle = \\ &= -\partial_{\mathbf{r}_i} \langle v^i(\mathbf{R} + \mathbf{r}) P(\mathbf{R}) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Наконец, вязкий член в (9.18a) равен

$$\nu \Delta \mathcal{K}^{ii}.$$

Таким образом, уравнение (9.18a) целиком приобретает вид

$$-\frac{1}{4} \partial_k S^{iik} = -\frac{\partial_t \mathcal{K}^{ii}}{2} + \epsilon_f + \nu \Delta \mathcal{K}^{ii}. \quad (9.18e)$$

Для изотропной статистики уравнение (9.18e) было установлено в работе [de Kármán & Howarth, 1938].

## 9-5.2 Изотропная турбулентность

Теперь положим, что статистика не только однородна в пространстве, но и изотропна.

### 9-5.2.1 Потоки энергии

Разделим скорость на крупномасштабную и мелкомасштабную согласно правилу (9.7a). Посмотрим, как устроен обмен энергией между масштабами. Производная по времени от энергии (9.7c), запасённой на крупных масштабах, равна

$$\partial_t E_K^< + \Pi_K = -2\nu \Omega_K^< + \epsilon_{fK}^<. \quad (9.18f)$$

Уравнение (9.18f) может быть получено как непосредственно из уравнения Навье-Стокса (9.13), так и Фурье-преобразованием соотношения Кармана-Ховарда-Монина (9.18e). В уравнении (9.18f) мощность внешней силы на крупных масштабах

$$\epsilon_{fK}^< = \langle (\mathbf{f}_K^< \cdot \mathbf{v}_K^<) \rangle, \quad (9.18g)$$

а энтрофия крупных масштабов

$$\Omega_K^< = \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\omega}_K^<) ^2 \rangle. \quad (9.18h)$$

Наконец, поток энергии от крупных к мелким масштабам, связанный с нелинейным взаимодействием масштабов, оказывается равным

$$\begin{aligned} \Pi_K &= \langle \mathbf{v}_K^< (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}_K^> \rangle = & (9.18i) \\ &= -\frac{1}{4} \int_{|\mathbf{k}| < K} (d^d k) \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^d r \partial_k S^{iik}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Первую строчку в (9.18i) легко получить, если стартовать непосредственно из уравнения Навье-Стокса (9.13) и под знаком усреднения воспользоваться бездивергентностью обеих частей поля скорости, см. (9.7b). Вторая строчка в (9.18i) получается, если использовать уравнение Кармана-Ховарда-Монина на корреляционные функции (9.18e), учтя соотношения типа (9.7c).

**Трёх-мерное пространство.** Рассмотрим сейчас трёх-мерное пространство,  $d = 3$ . Произведём сначала интегрирование во второй строчке (9.18i) по  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int_{|\mathbf{k}| < K} (d^3 k) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} &= -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^K k dk \sin(kr) = \quad (9.18j) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r^2} (r^j \partial_j) \int_0^K dk \cos(kr) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r^2} (r^j \partial_j) \frac{\sin(Kr)}{r}. \end{aligned}$$

Подставим этот результат в (9.18i) и проинтегрируем по частям

$$\Pi_K = -\frac{1}{8\pi^2} \int d^3 r \frac{\sin(Kr)}{r} \partial_j \left( \frac{r^j}{r^2} \partial_k S^{iik} \right). \quad (9.18k)$$

При интегрировании по частям граничные члены были приняты равными нулю, поскольку предполагается, что структурная функция  $S^{ijk}$  выше интегрального масштаба обращается в ноль, поскольку на таких расстояниях поле скорости уже принимает статистически независимые значения.

Величина  $\partial_k S^{iik}(\mathbf{r})$  в (9.18k) является скаляром, зависящим только от модуля радиус-вектора. Для трёх-мерного пространства равенство (9.11g) принимает вид

$$\partial_k S^{iik} = \frac{1}{3} (3 + r\partial_r)(5 + r\partial_r) \frac{S^{rrr}}{r} \quad (9.18l)$$

Поэтому поток энергии (9.18k) равен

$$\begin{aligned} \Pi_K &= -\frac{1}{6\pi} \int_0^\infty dr \frac{\sin(Kr)}{r} \quad (9.18m) \\ &\quad (1 + r\partial_r)(3 + r\partial_r)(5 + r\partial_r) \frac{S^{rrr}}{r}. \end{aligned}$$

### 9-5.2.2 Соотношение Колмогорова

Рассмотрим статистически стационарное турбулентное течение. В этом случае производная по времени в уравнении Кармана-Ховарда (9.18e) равна нулю. Будем рассматривать масштабы  $\lambda = |\mathbf{r}|$ , малые по сравнению с масштабом  $L_f$  возбуждающей течение силы. Тогда мы можем приближённо написать

$$\epsilon_f(\mathbf{r}) \approx \epsilon, \quad r \ll L_f. \quad (9.18n)$$

Однако рассматриваемые масштабы велики по сравнению с колмогоровским масштабом  $r_\eta$ , потому вязкий

член пренебрежимо мал. Итак, уравнение (9.18e) редуцировано до

$$-\frac{1}{4} \partial_k S^{iik} = \epsilon. \quad (9.18o)$$

в инерционном интервале. Левую часть (9.18o) можно переписать с учётом параметризации (9.22i). Таким образом,

$$-\frac{1}{12} (3 + r\partial_r)(5 + r\partial_r) \frac{S^{rrr}}{r} = \epsilon. \quad (9.18p)$$

Итак, приходим к ответу для чисто продольной компоненты структурной функции третьего порядка

$$S^{rrr} = -\frac{4}{5} \epsilon r. \quad (9.18q)$$

Подстановка (9.18q) в (9.18m) даёт, что поток энергии по масштабам (9.18m) не зависит от масштаба,  $\Pi_K = \epsilon$ . Таким образом, мы

- нашли стационарное решение, характеризующееся скейлингом (9.18q);
- показали, вычислив (9.18m), что передача энергии происходит действительно от крупным масштабам к мелким

### 9-5.2.3 Корреляционная функция флуктуаций давления

Для статистически однородной и изотропной модели [Hill & Wilczak, 1995].

### 9-5.3 Задачи

- **Задача 1:** Будем считать силу  $\mathbf{f}$  в (9.13) случайной по времени, с коротким временем корреляции, статистически изотропной и обладающей некоторой длиной корреляции  $L_f$  в пространстве. В таком случае статистика случайной силы полностью задаётся парной корреляционной функцией:

$$\langle f_i(\mathbf{r}, t) f_k(\mathbf{r}', t') \rangle = \rho^2 \epsilon \frac{2\delta_{ik}}{d-1} \chi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(t - t'), \quad (9.19)$$

где безразмерная функция  $\chi(r)$  равна 1 в нуле и убывает на расстоянии  $L_f$ , а  $d$  — размерность пространства. Покажите, что мощность, затрачиваемая силой на единицу массы, равна действительно (9.15f), и что приближение (9.18n) действительно оправдано.

## §9-6. Двумерный статистически изотропный турбулентный поток

Будем считать, что внешняя сила имеет характерный масштаб  $L_f$  и статистически однородна в пространстве. Сила производит в среднем мощность  $\epsilon$  (9.15f) на единицу массы. Число Рейнольдса (9.15k) на масштабе накачки велико

$$\text{Re}_f = \frac{\epsilon^{1/3} L_f^{4/3}}{\nu} \gg 1. \quad (9.20a)$$

Неравенство (9.20a) означает, что на масштабе  $L_f$  влияние вязкости пренебрежимо мало. Мы предполагаем, что и влияние трения о дно на этом масштабе незначительно. Тогда мы можем ожидать, что для амплитуды скорости на масштабе  $L_f$  верна оценка (9.15g), а условие слабости трения о дно может быть записано в виде

$$L_\alpha = \alpha^{-3/2} \epsilon^{1/2} \gg L_f. \quad (9.20b)$$

Величина  $L_\alpha$  имеет размерность длины и должна значительно превосходить масштаб возбуждающей течение силы. Размер области течения  $L_{\text{flow}}$ , в свою очередь, предполагается превышающим длину  $L_\alpha$ ,

$$L_{\text{flow}} \gg L_\alpha. \quad (9.20c)$$

Смысл длины  $L_\alpha$  будет выяснен ниже, см. (9.22a).

### 9-6.1 Энстрофия

Помимо энергии (9.17) при описании двумерного турбулентного течения важна ещё одна квадратичная по скорости величина

$$\Omega = \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle, \quad (9.21a)$$

которая в силу (6.5) сохраняется при отсутствии процессов диссипации.

С учётом трения о дно уравнение на изменение средней кинетической энергии (9.16) есть

$$\epsilon - \partial_t E = 2\nu\Omega + 2\alpha E \quad (9.21b)$$

Уравнение на изменение энстрофии имеет аналогичный вид:

$$\eta - \partial_t \Omega = \nu \langle (\nabla \omega)^2 \rangle + 2\alpha \Omega, \quad (9.21c)$$

где энстрофийная мощность  $\eta$ , передаваемая жидкости на единицу её массы внешней силой, есть

$$\eta = \langle f\omega \rangle, \quad [\eta] = c^{-3}. \quad (9.21d)$$

#### 9-6.1.1 Каскад энстрофии

Посмотрим, каковы будут скейлинговые соотношения, если мы предположим, что вместо энергии при нелинейном взаимодействии передающейся по цепочке масштабов величиной является энстрофия. Воспроизведём

аналогичные скейлинговые оценки, которые были сделаны в Пункте 9-4.2. Вместо (9.15g) имеем

$$v_\lambda \sim \eta^{1/3} \lambda. \quad (9.21e)$$

Отталкиваясь от (9.21e) можно подумать, что зависимость разности скоростей  $\delta v(\mathbf{r})$  от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  исчерпывается линейной зависимостью, которая абстрактно нами была разобрана в Пункте 9-2.3. То, что на фоне преобладающей линейной зависимости есть другие вклады, можно увидеть, записав асимптотический по большому числу Рейнольдса вид спектра энергии

$$E_k = C_k \eta^{2/3} k^{-3}, \quad (9.21f)$$

где  $C_k$  — феноменологическая константа. Этот спектр быстрее возрастает в сторону крупных масштабов (и, соответственно, быстрее убывает в сторону мелких масштабов) по сравнению со спектром для инерционного интервала с каскадом энергии (9.15m).

### 9-6.2 Прямой и обратный каскады

Сила  $f_u$  производит как энергетическую мощность  $\epsilon$  (9.15f), так и энстрофийную мощность  $\eta$  (9.21d). На масштабе возбуждающей силы  $L_f$  ни энергия, ни энстрофия не претерпевают существенной диссипации. Поэтому и та и другая мощности должны уходить потоками по масштабам от масштаба  $L_f$ . При этом эти потоки не могут сосуществовать на одном и том же достаточно логарифмически широком инерционном интервале, поскольку скейлинги (9.15m, 9.21f), определяемые этими потоками, имеют разные показатели.

Эти соображения заставляют прийти к выводу, что потоки энергии и энстрофии должны быть направлены в разные стороны по масштабам. Энергия течёт вверх по масштабам, такой каскад называется *обратным каскадом энергии*. Энстрофия течёт в более мелкие масштабы. Противоположный вариант, когда энстрофия течёт в более крупные масштабы, как мы обсудим ниже, невозможен.

#### 9-6.2.1 Обратный каскад энергии

Для обратного каскада имеют место уже обсуждавшиеся для трёх-мерной турбулентности скейлинговые оценки (9.15g, 9.15m). Таким образом, кинетическая энергия определяется вихрями самого большого масштаба, присутствующего в течении. Этот масштаб равен  $L_\alpha$  (9.20b). Действительно, если в оценке (9.15n) для энергии в качестве  $L$  мы возьмём  $L_\alpha$ , то получим, что уравнение на баланс энергии (9.21b) удовлетворено за счёт первого и последнего членов,

$$\epsilon = 2\alpha E, \quad E \sim (\epsilon L_\alpha)^{2/3}. \quad (9.22a)$$

Отметим, что если бы область, доступная для течения, была бы меньше  $L_\alpha$ , то условие баланса энергии имело бы вид отличный от (9.22a). Инерционным интервалом для обратного каскада энергии является

$$L_f \ll \lambda \ll L_\alpha. \quad (9.22b)$$

С учётом трения о дно уравнение Кармана-Ховарда (9.18e) приобретает вид

$$-\frac{1}{4}\partial_k S^{iik} = -\frac{\partial_t \mathcal{K}^{ii}}{2} + \epsilon_f - \alpha \mathcal{K}^{ii} + \nu \Delta \mathcal{K}^{ii}. \quad (9.22c)$$

На масштабах инерционного интервала (9.22b) величина  $\epsilon_f(\mathbf{r})$  (9.18d) пренебрежимо мала. Наоборот, парная корреляционная функция приблизительно равна своему значению в нуле,  $\mathcal{K}^{ii}(\mathbf{r}) \approx 2E$ . Используя баланс энергии (9.22a), приходим к уравнению

$$-\frac{1}{4}\partial_k S^{iik} = -\epsilon, \quad (9.22d)$$

сравни с аналогичным уравнением для трёх-мерного случая (9.18o). В двумерном случае параметризация структурной функции (9.11g) через её чисто продольную компоненту преобразует уравнение (9.22d) до

$$\frac{1}{12}(r\partial_r + 2)(r\partial_r + 4)\frac{S^{rrr}}{r} = \epsilon, \quad (9.22e)$$

сравни с трёх-мерным (9.18p). Решением этого уравнения является

$$S^{rrr} = \frac{3}{2}\epsilon r. \quad (9.22f)$$

сравни с его аналогом в трёх-мерном случае (9.18q).

Определим выражение для потока энергии между масштабами, как это было сделано в Пункте 9-5.2.1 для трёх-мерного случая. В уравнение для баланса энергии (9.18f) нужно добавить трение о дно,

$$\partial_t E_K^< + \Pi_K = -2\alpha E_K^< - 2\nu\Omega_K^< + \epsilon_{fK}^<. \quad (9.22g)$$

Выражение для потока энергии между масштабами (9.18i) остаётся неизменным. Вычисления, аналогичные (9.18j), в двумерном пространстве приобретают вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int_{|\mathbf{k}|<K} (d^2k) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} &= -\frac{1}{8\pi r^2} \int_0^{Kr} z dz J_0(z) = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{r} K J_1(Kr). \end{aligned} \quad (9.22h)$$

Мы воспользовались интегральным представлением функции Бесселя нулевого порядка,

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cos(z\theta) = 2\pi J_0(z),$$

а также соотношением  $z J_0(z) = \partial_z(z J_1(z))$ . Для двумерного пространства равенство (9.11g) принимает вид

$$\partial_k S^{iik} = \frac{1}{3}(2 + r\partial_r)(4 + r\partial_r)\frac{S^{rrr}}{r}. \quad (9.22i)$$

Поток энергии равен (сравни с (9.18m))

$$\begin{aligned} \Pi_K &= -\frac{1}{12} \int_0^\infty K dr J_1(Kr) \\ &\quad (2 + r\partial_r)(4 + r\partial_r)\frac{S^{rrr}}{r}. \end{aligned} \quad (9.22j)$$

### 9-6.2.2 Прямой каскад энтрофии

Динамика завихренности определяется уравнением (6.3). Проведем процедуры, аналогичные тем, которые привели к уравнению Кармана-Ховарда (9.18e) и, тем самым, установим уравнение, которое связывает парную корреляционную функцию завихренности  $\mathcal{K}(\mathbf{r})$  (9.12a) и структурную функцию третьего порядка  $S^i(\mathbf{r})$  (9.12e).

Определим корреляционную функцию накачки

$$\eta_f(\mathbf{r}) = \frac{\langle f_1 \varpi_2 + f_2 \varpi_1 \rangle}{2} = -\frac{1}{2} \Delta \epsilon_f(\mathbf{r}). \quad (9.23a)$$

Уравнение Кармана-Ховарда (9.18e) принимает вид

$$-\frac{\partial_r(r S_\varpi^r)}{4r} = -\frac{\partial_t \mathcal{K}_\varpi}{2} + \eta_f + \nu \Delta \mathcal{K}_\varpi. \quad (9.23b)$$

На расстояниях, малых по сравнению с масштабом накачки,  $r \ll L_f$ , но больших по сравнению с вязким масштабом, в правой части (9.23b) следует удержать только второе слагаемое, взятое в совпадающих точках, то есть положить  $\eta_f \approx \eta$ . Решением уравнения является

$$\partial_r(r S_\varpi^r) = -4r\eta, \quad \Rightarrow \quad S_\varpi^r = -2\eta r. \quad (9.23c)$$

• **Задача 1:** В двумерном статистически изотропном и инвариантном по отношению к операции инверсии хаотическом потоке структурные функции  $S^{rrr}$  (9.11e) и  $S_\varpi^r$  (9.12e) однозначно связаны между собой через условие несжимаемости течения. Установите эту связь и найдите зависимость  $S^{rrr}(r)$ , соответствующую установленной зависимости (9.23c) для  $S_\varpi^r$  в инерционном интервале прямого каскада энтрофии.

## §9-7. Случайное течение на малых масштабах

Продолжим изучать статистические свойства течения на малых масштабах, на которых поле скорости достаточно приблизить линейным в пространстве профилем, см. Пункт 9-2.3. Установим общие свойства статистики геометрии близких лагранжевых траекторий. Перейдём с систему отсчёта, начало которой движется с некоторой лагранжевой траекторией. Тогда любая достаточно близкая к ней другая лагранжева траектория  $\mathbf{r}(t)$  будет удовлетворять уравнению (9.8b)

$$\partial_t r^i = \zeta^{ik}(t) r^k. \quad (9.24a)$$

Решением этого уравнения является

$$r^i(t) = W^{ik}(t, t_0) r^k(t_0), \quad (9.24b)$$

где матрица  $\hat{W}$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \hat{W} = \zeta \hat{W}, \quad \hat{W}(t, t_0) = \hat{1}. \quad (9.24c)$$

Матрица  $\hat{W}(t, t_0)$  задаёт аффинное преобразование элемента объёма жидкости, которое производит поток над ним за промежуток времени с  $t_0$  до  $t$ .

Вообще говоря, решением уравнения (9.24c) является  $T$ -упорядоченная экспонента. Для того, чтобы выявить характерные свойства решения (9.24c), представим матрицу  $\hat{W}$  в виде (*сингулярное разложение матрицы, the singular value decomposition of a matrix, SVD*)

$$\hat{W} = \hat{N} \hat{D} \hat{O}, \quad \hat{N}^T = \hat{N}^{-1}, \quad \hat{O}^T = \hat{O}^{-1}, \quad (9.24d)$$

$$D_{ii} = \exp(\rho_i), \quad D_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Для определённости мы будем считать, что показатели экспонент расположены в невозрастающем порядке:

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \quad (9.24e)$$

В силу несжимаемости течения сумма экспонент равна единице,

$$\sum_{i=1}^d \rho_i = 1. \quad (9.24f)$$

Динамика матриц  $\hat{N}$  и  $\hat{D}$  оказывается независимой от значения матрицы  $\hat{O}$ . Действительно, из уравнения (9.24c) следует замкнутой уравнение на матрицу  $\hat{W} \hat{W}^T$ , которая не содержит в себе матрицы  $\hat{O}$ :

$$\frac{d(\hat{W} \hat{W}^T)}{dt} = \hat{\zeta} \hat{W} \hat{W}^T + \hat{W} \hat{W}^T \hat{\zeta}. \quad (9.24g)$$

Перепишем это уравнение в терминах матриц  $\hat{D}$  и  $\hat{N}$ :

$$\frac{2d \ln \hat{D}}{dt} + \hat{D} \hat{\Omega}^N \hat{D}^{-1} - \hat{D}^{-1} \hat{\Omega}^N \hat{D} = \hat{D} \hat{\zeta}^T \hat{D}^{-1} + \hat{D}^{-1} \hat{\zeta} \hat{D},$$

$$\hat{\zeta} = \hat{N}^T \hat{\zeta} \hat{N} \quad \partial_t \hat{N} = \hat{N} \hat{\Omega}^N. \quad (9.24h)$$

Диагональные матричные элементы этого уравнения сводятся к

$$\partial_t \rho_i = \tilde{\zeta}_{ii}. \quad (9.24i)$$

Скорость изменения ортогональной матрицы  $\hat{N}$

$$\Omega_{ij}^N = \frac{\tilde{\zeta}_{ij} \exp(\rho_j - \rho_i) + \tilde{\zeta}_{ji} \exp(\rho_i - \rho_j)}{2 \sinh(\rho_j - \rho_i)} \quad (9.24j)$$

перестаёт зависеть от значений показателей  $\rho_i$ , если их разности значительно больше единицы: при

$$\rho_j - \rho_i > 0, \quad \rho_j - \rho_i \gg 1, \quad (9.24k)$$

имеем

$$\Omega_{ij}^N = \tilde{\zeta}_{ij} \theta_{ij} - \tilde{\zeta}_{ji} \theta_{ji}, \quad (9.24l)$$

где по повторяющимся индексам нет суммирования и, по определению,  $\theta_{ij} = 1$  при  $i > j$ , а в противном случае  $\theta_{ij} = 0$ .

В пределе (9.24k) правая часть уравнения (9.24i) на  $\partial_t \rho_i$  имеет однородную по времени статистику. Случайные процессы  $\tilde{\zeta}^{ii}$  имеют средние  $\lambda_i$ , сумма которых равна нулю вследствие несжимаемости течения, и в силу ограничения (9.24e) удовлетворяющие неравенствам

$$\langle \tilde{\zeta}^{ii} \rangle = \lambda_i, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_d = 0, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \quad (9.24m)$$

Величины  $\lambda_i$  называются экспонентами Ляпунова для течения, а  $\lambda_1 \equiv \lambda$  (старшей) ляпуновской экспонентой. Распределение показателей  $\mathcal{P}(\rho_i)$  в общем случае описывается некоторой энтропийной функцией  $S$  (12.11). В трёх-мерном случае

$$\mathcal{P}(\rho_i) = \frac{(\det \|\partial_{\alpha\beta} S\|)^{-1/2}}{(2\pi\lambda t)^{(d-1)/2}} \exp\left(-\lambda t S\left(\frac{\rho_1}{\lambda t}, \frac{\rho_2}{\lambda t}\right)\right)$$

$$\delta(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \theta(\rho_1 - \rho_2) \theta(\rho_2 - \rho_3), \quad (9.24n)$$

где  $\|\partial_{\alpha\beta} S\|$  — матрица Гессе (матрица вторых производных) функции  $S$  в минимуме, который достигается при  $\rho_i/t = \lambda_i$ . Если течение двумерное, то в (9.24n) следует формально положить  $\rho_2 = 0$ .

### 9-7.1 Модель коротко-коррелированного во времени и статистически изотропного поля скорости

Пусть статистика поля скорости изотропна, так что парная корреляционная функция его градиента имеет вид (9.8e). Поскольку в уравнении (9.24i) за большое время происходит суммирование многих независимых одинаково распределённых величин, то в простейшей модели можно считать, что процесс  $\hat{\zeta}(t)$  является ланжевеновским шумом,

$$\langle \zeta^{i\alpha}(0) \zeta^{k\beta}(t) \rangle = \delta(t) D \left( (d+1) \delta^{ik} \delta^{\alpha\beta} - \delta^{i\alpha} \delta^{k\beta} - \delta^{i\beta} \delta^{k\alpha} \right). \quad (9.24o)$$

Наша цель состоит в нахождении энтропийной функции (9.24n).

Прежде чем непосредственно перейти к её вычислению, определим статистику матрицы  $\hat{\zeta}$  (9.24i) в пределе сильной деформации (9.24k). Неприводимая часть парного среднего  $\hat{\zeta}$  имеет ту же статистику (9.24o), поскольку корреляционная функция (9.24o) инвариантна относительно вращений. Среднее (9.24m) можно вычислить тем же способом, что был применён при поиске вклада от турбулентной диффузии в уравнении на парную корреляционную функцию пассивного скаляра, см. (10.6j). Согласно (9.24i), матрица поворота

$$\hat{N}(t) - \hat{N}(t - \tau) \approx \hat{N}(t - \tau) \int_{t-\tau}^t dt' \hat{\Omega}^{N'} \quad (9.24p)$$

Подставим теперь сюда выражение для угловой скорости вращения (9.24l) и произведём усреднение по статистике (9.24o). При этом в рамках обозначений (9.24o) интегрирование производится до  $t = 0$ , т.е. ‘до середины’  $\delta$ -функции, которая должна предполагаться симметричной вследствие (9.8e) — отсюда возникает мно-

житель 1/2. Таким образом, получаем

$$\lambda_i = \langle \zeta^{ii} \rangle = \frac{dD}{2} \sum_j (\theta_{ji} - \theta_{ij}) = \frac{d(d+1-2i)D}{2}. \quad (9.24q)$$

где  $\theta_{ij}$ , напомним, определено в (9.24l). (Если бы мы вычисляли без предположения о сильной деформации (9.24k), то вместо разности  $\theta_{ji} - \theta_{ij}$  в (9.24q) получилось бы  $\coth(\rho_i - \rho_j)$ .) Уравнение на экспоненты (9.24i) теперь можно переписать в виде

$$\partial_t \rho_i = \lambda_i + \xi_i, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = \delta(\tau) D(d\delta^{ij} - 1). \quad (9.24r)$$

Для трёх-мерного случая,  $d = 3$ , старшая ляпуновская экспонента  $\lambda = 3D$ , а следующая экспонента Ляпунова  $\lambda_2 = 0$ . Энтропийная функция (9.24n)

$$S\left(\frac{\rho_1}{\lambda t}, \frac{\rho_2}{\lambda t}\right) = \left(\frac{\rho_1}{\lambda t} - 1\right)^2 + \left(\frac{\rho_1}{\lambda t} - 1\right) \frac{\rho_2}{\lambda t} + \left(\frac{\rho_2}{\lambda t}\right)^2. \quad (9.24s)$$

Для двумерного течения ( $d = 2$ ) экспонента Ляпунова  $\lambda = D$ , а энтропийная функция

$$S\left(\frac{\rho}{\lambda t}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\lambda t} - 1\right)^2. \quad (9.24t)$$

## §9-8. Турбулентное течение, имеющее среднюю сдвиговую компоненту

Рассмотрим течение в прямом канале или вдоль прямой стенки. Вдоль направления течения, по которому направим ось  $Ox$ , все величины кроме давления предполагаются статистически однородными, а давление падает линейно с координатой. Полная скорость течения  $\mathbf{v}$ , таким образом,

$$\mathbf{v} = U\mathbf{e}_x + \mathbf{u}, \quad \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (9.25a)$$

где  $U = U(y, z)$  есть постоянная во времени часть скорости.

### 9-8.1 Логарифмический профиль скоростей

*Литература:* Теория хорошо изложена в [Ландау & Лифшиц, 1986, § 42].

Рассмотрим течение в плоском канале. Его ширина по  $y$  направлению равна  $d$ . Вдоль  $z$ -направления канал неограничен, вдоль этого направления течение предполагается статистически однородным. Стандартно  $x$ -направление называется *направлением течения* (*streamwise direction*),  $y$ -направление — направлением от стенки (*wall-normal direction*),  $z$ -направление — поперечным направлением (*spanwise direction*).

Скорость трения (friction velocity)  $u_\tau$

$$u_\tau^2 = \nu \partial_y U - \langle u^x u^y \rangle. \quad (9.25b)$$

Согласно нашим предположениям, скорость трения может зависеть только от координаты нормальной к стенке,  $u_\tau = u_\tau(y)$ .

Усредним  $x, y$ -компоненты уравнения Навье-Стокса (2.12c)

$$\partial_t u^x - \partial_i (\nu \partial_i v^x - v^i (U + u^x)) = -\partial_x p, \quad (9.25c)$$

$$\partial_t u^y - \partial_i (\nu \partial_i v^y - v^i u^y) = -\partial_y p, \quad (9.25d)$$

предполагая, что статистика пульсаций скорости однородна вдоль направления течения (streamwise) и в поперечном направлении (spanwise). С учётом определения (9.25b) получим

$$\partial_x \langle p \rangle = \partial_y u_\tau^2, \quad \partial_y \langle p \rangle = -\partial_y \langle (u^y)^2 \rangle. \quad (9.25e)$$

Уравнение на  $y$ -компоненту (9.25e) говорит о том, что среднее по времени давление неоднородно поперёк канала. С другой стороны, чтобы статистика потока была однородной вдоль канала, надо, чтобы градиент давления вдоль него  $\partial_x \langle p \rangle \equiv p'$  был однородным в пространстве. Тогда первое уравнение (9.25e) может быть проинтегрировано:

$$u_\tau^2 = (d/2 - y)p', \quad y < d/2. \quad (9.25f)$$

(В области  $y > d/2$  в определении (9.25b) следует поменять знак.) Напомним, что для того, чтобы течение бы-

ло турбулентным, и, следовательно, текущее рассмотрение имело смысла, число Рейнольдса должно быть большим,

$$\text{Re} = \frac{d \cdot U(d)}{\nu} \gg 1. \quad (9.25g)$$

На практике это означает, что  $\text{Re} > 2000 \div 3000$ .

### 9-8.1.1 Логарифмический профиль скоростей

В решении (9.25f) можно пренебречь зависимостью от  $y$  на расстояниях  $y \ll d$ . Поэтому вблизи стенки касательное напряжение не зависит от расстояния до неё,

$$\frac{du_\tau}{dy} = 0, \quad u_\tau^2 = \nu \partial_y U|_{y=0}. \quad (9.25h)$$

Касательное напряжение (9.25b) состоит из вязкой и турбулентной частей. На самых малых расстояниях доминирует вязкий вклад, на больших — турбулентный. Оценим расстояние  $\delta_\nu$ , на котором эти два вклада сравниваются по порядку величины. Считая, что все компоненты скорости на этом масштабе одного порядка, получаем

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}. \quad (9.25i)$$

Отметим, что эта оценка сильно отличается от оценки (3.16c), в которой толщина  $\delta$  вязкого пограничного слоя зависела от вязкости корневым образом,  $\delta \propto \sqrt{\nu}$ . Источник отличия состоит в том, что здесь мы предположили, что нормальная компонента скорости на расстоянии  $\delta_\nu$  сравнима с тангенциальной, тогда как для ламинарных течений, рассматривавшихся в § 3-5, нормальная компонента остаётся параметрически малой на расстоянии порядка  $\delta$ . Что касается средней скорости в нашем случае, то в глубине вязкого пограничного слоя, при  $y \ll \delta_\nu$ , она есть

$$U = \frac{y}{\delta_\nu} u_\tau = \frac{u_\tau^2}{\nu} y. \quad (9.25j)$$

Теперь определим поведение средней скорости  $U$  на расстояниях  $d \gg y \gg \delta_\nu$ , где вязкость не играет роли в (9.25b). В этой области число Рейнольдса велико. Поэтому статистика турбулентных пульсаций не должна зависеть от вязкости. Эта статистика определяется величиной потока, обеспечивающего существование самой турбулентности — в данном случае это поток  $x$ -компоненты импульса в  $y$ -направлении, который определяется параметром  $u_\tau$ , и масштабом, который есть расстояние до стенки  $y$ . (Сравни это построение со случаем изотропной трёх-мерной турбулентности, где имеется поток  $\epsilon$  другой сохраняющейся величины — энергии.) Величина флуктуаций скорости должна быть принятой имеющей порядок среднего течения,  $u \sim U$ . Уравнение на среднее течение теперь может быть написано, исходя из соображений размерности:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y}. \quad (9.25k)$$

Числовая константа  $\kappa$  не может быть определена аналитически; часто её называют *Kármán constant*. Согласно экспериментальным данным и данным численного счёта, её значение  $\kappa \approx 0.41$ . Интегрирование (9.25k) даёт

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C^+, \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu}, \quad (9.25l)$$

где  $C^+ \approx 5.0$  — ещё одна числовая константа. Зависимость (9.25l) называют *логарифмическим профилем скоростей*.

Отметим, что в соотношении (9.25b) величина вязкой части потока импульса мала,  $\nu \partial_y U = (\delta_\nu / \kappa y) u_\tau^2 \ll u_\tau^2$ , то есть основная часть потока касательного напряжения создаётся турбулентным вкладом  $-\langle u^x u^y \rangle$ . Этот вклад качественно можно приписать положительной турбулентной вязкости. Если считать, что величина флуктуаций скорости  $u \sim U$ , то величина  $-\langle u^x u^y \rangle = u_\tau^2$  оказывается логарифмически малой по сравнению с  $\langle u^2 \rangle$ .

### 9-8.2 Турбулентное течение в трубе

Рассмотрим течение в трубе постоянного радиуса  $R$ . Средняя скорость (усреднённая по поперечному сечению) равна  $\bar{U}$ , так что средний расход жидкости равен  $Q = \pi R^2 \bar{U}$ . Выясним, какова зависимость среднего расхода жидкости  $Q$  от градиента среднего давления  $\partial_x P = \rho p'$ , где  $\rho$  — массовая плотность жидкости.

С логарифмической точностью мы можем использовать выражения для логарифмического профиля средней скорости у стенки (9.25l), подставив вместо  $y$  радиус  $R$ , а вместо  $U$  — среднюю скорость  $\bar{U}$ :

$$\bar{U} = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln \frac{R u_\tau}{\nu}. \quad (9.26a)$$

Падение давления определяется (9.25f), где в качестве  $d$  мы также берём  $R$ :

$$p' = \frac{2u_\tau^2}{R}. \quad (9.26b)$$

Теперь мы можем выразить  $u_\tau$  через  $p'$  в (9.26a), получив

$$\bar{U} = \frac{\sqrt{R p' / 2}}{\kappa} \ln \frac{\sqrt{R^3 p' / 2}}{\nu}. \quad (9.26c)$$

Расход жидкости, таким образом,

$$Q = \frac{\pi R^{5/2} \sqrt{\rho}}{\sqrt{2} \kappa} \ln \frac{\sqrt{R^3 p' / 2}}{\nu}, \quad (9.26d)$$

т.е. зависит от радиуса трубы как  $Q = R^{5/2}$  а от перепада давления как  $Q \propto \sqrt{p'}$ , в обоих случаях не считая дополнительного логарифмического множителя.

### 9-8.2.1 Обзор литературы

Недавние работы:

- Течение по каналу кругового сечения экспериментально исследовано в большом диапазоне чисел Рейнольдса в [Cantwell, 2019].
- Степень применимости логарифмического профиля к течениям различной геометрии обсуждалось в [Luchini, 2017].
- Когерентные структуры в сдвиговом течении, возникающем в приграничном слое в течении около стенки,

или в каналах [Jiménez, 2018]

### 9-8.3 Задачи

- **Задача 1:** Поперечное сечение трубы есть эллипс с полуосями  $R \ll L$ . Оцените расход жидкости  $Q$  через трубу, если число Рейнольдса для течения в трубе велико, так что течение турбулентно. Падение давления на единицу длины, делённое на массовую плотностью жидкости, равно  $p'$ , кинематическая вязкость жидкости равна  $\nu$ , течение несжимаемо.

# ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

## §10-1. Перемешивание

Предположим, что жидкость переносит с собой некоторое скалярное поле  $\vartheta$ , которое подвержено процессу диффузии:

$$\partial_t \vartheta + \operatorname{div}(\mathbf{v}\vartheta) = \kappa \Delta \vartheta + f. \quad (10.1a)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент диффузии поля, и, как обычно,  $\mathbf{v}$  — поле скорости жидкости,  $f$  — возможный внешний источник, производящий новые неоднородности в пространственном распределении поля  $\vartheta$ . От уравнения непрерывности (2.4a) уравнение на скаляр  $\vartheta$  (10.1a) отличается наличием диффузии. Согласно уравнению (10.1a), полное количество скаляра сохраняется,

$$\int d^3r \vartheta = \text{const}, \quad (10.1b)$$

про условия отсутствия потока скаляра на границе и внешнего источника,  $f = 0$ . Под полем  $\vartheta$  может подразумеваться, например, концентрация некоторой примеси или поле температуры. Если речь идёт о примеси, то уравнение (10.1a) применимо тогда, когда частицы примеси настолько малы, что их скорость полностью совпадает со скоростью увлекающей их жидкости (за исключением поправки, возникающей из-за диффузии). Если обратным влиянием поля  $\vartheta$  на скорость жидкости можно пренебречь, то его называют *пассивным скаляром* (*passive scalar*).

Положим сначала, что диффузия настолько слаба, что ею можно пренебречь в (10.2a). Тогда скаляр переносится вдоль лагранжевых траекторий  $\mathbf{r}(t)$  без изменения своего значения (а если есть ненулевой источник  $f$ , то это значение накапливается):

$$\vartheta(t, \mathbf{r}) = \vartheta_0(\mathbf{r}(t_0)) + \int_{t_0}^t d\tau f(\tau, \mathbf{r}(\tau)), \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}), \quad (10.1c)$$

где выбрана такая лагранжева траектория, что  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}$ .

Элементы жидкости, ранее расположенные относительно близко друг к другу, в неоднородном течении почти всегда со временем удаляются друг от друга. Поскольку (хотя бы в среднем) течение несжимаемо, то это означает, что области, исходно характеризующиеся постоянным в пространстве значением скаляра  $\vartheta$ , становятся очень деформированными, в одном направлении оказываясь многократно вытянутыми, а в другом направлении — на столько же суженными. В результате поле скаляра оказывается сильно неоднородным,

представляя собой тонкие квази-однородные слои, уложенные вдоль друг друга. Поперечный масштаб этого распределения падает с течением времени, так что диффузия вскоре становится существенной, даже если в начале её эффектом можно было пренебречь. Диффузия приводит к гомогенизации распределения скаляра поперёк слоёв, то есть теперь  $\vartheta$  становится однородным во всём пространстве. В этом состоит значение процесса перемешивания: совместное действие хаотизации пространственного распределения скаляра путём его переноса неоднородным в пространстве течением (*stirring*) и диффузии приводит к ускоренному достижению гомогенности по сравнению со случаем, когда течение отсутствует и действует одна лишь диффузия.

Характерный масштаб в самом течении жидкости определяется значением коэффициента кинематической вязкости  $\nu$ . Безразмерное отношение

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{or} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (10.1d)$$

называется *числом Шмидта* (*Schmidt number*), если речь идёт о примеси, или *числом Прандтля* (*Prandtl number*), если речь идёт о температуре. От величины числа Шмидта зависит область применимости приближения (10.1c). Пусть число Шмидта мало,  $\text{Sc} \ll 1$ , т.е. диффузия скаляра значительно сильнее вязкой диффузии импульса. Тогда, например, в развитом турбулентном потоке масштаб  $r_\kappa$ , на котором оказывается существенной диффузия, существенно больше масштаба Колмогорова  $r_\eta$  (9.151), его оценка получена ниже, смотри уравнение (10.11f). В обратном случае относительно слабой диффузии,  $\text{Sc} \gg 1$ , диффузионный масштаб находится под вязким,  $r_\kappa \ll r_\eta$ . В этом случае поле скорости является гладким на диффузионном масштабе  $r_\kappa$  и характеризуется экспонентой Ляпунова  $\lambda$ , смотри § 9-7. Поэтому оценкой для диффузионного масштаба является  $r_\kappa = \sqrt{\kappa/\lambda}$ , в этом пределе он также называется масштабом Бэтчелора. Приближение (10.1c) остаётся верным только на масштабах, значительно превышающих  $r_\kappa$ , и на временах, пока вызванное диффузией размытие лагранжевых траекторий несущественно.

В случайных потоках поле  $\vartheta$  можно характеризовать двумя величинами, являющимися результатом усреднения по статистике случайного потока — средней концен-

трацией  $\langle \vartheta \rangle$  и парной корреляционной функцией

$$F(t, \mathbf{r}, \mathbf{R}) = \langle \vartheta(t, \mathbf{r}_1) \vartheta(t, \mathbf{r}_2) \rangle, \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (10.1e)$$

Среднюю концентрацию  $\langle \vartheta \rangle$  можно понимать и как результат усреднения по некоторому объёму, размер кото-

рого мал по сравнению с внешним масштабом задачи. В частности, динамика  $\langle \vartheta \rangle$  во времени может описывать перенос скаляра из одной области в другую турбулентным потоком. Парная корреляционная функция подходит для описания процесса гомогенизации поля скаляра, главным образом на относительно малых масштабах, на фоне уже известной средней концентрации  $\vartheta$ .

## §10-2. Перемешивание в гладком поле скорости

Если число Шмидта (10.1d) велико,  $Sc \gg 1$ , то в турбулентном потоке существует диапазон масштабов много больших диффузионного масштаба  $r_\kappa$  и много меньших масштаба  $r_\eta$ , ниже которого поле скорости достаточно приблизить в пространстве линейной функцией координат. Таким образом, локально поле скорости задаётся его градиентом  $\partial_k v^i$ , статистические свойства которого для случайных статистически стационарных потоков обсуждались в Пункте 9-2.3. Статистические свойства лагранжевых траекторий обсуждались далее в § 9-7.

Как это было сделано в Пункте 9-2.3, перейдём в систему координат, начало которой движется вместе с некоторой лагранжевой траекторией. В этой системе координат уравнение на перенос пассивного скаляра (10.6a) в случае линейного пространственного профиля скорости (9.8a) приобретает вид

$$(\partial_t + \zeta^{ij} r^j \partial_i) \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + f. \quad (10.2a)$$

Положим в уравнении (10.2a) источник равным нулю,  $f = 0$ , и будем исследовать задачу с начальными условиями. Как известно, уравнение диффузии, которое есть частный случай (10.2a) с нулевым полем скорости, на больших временах имеет решения с гауссовым пространственным профилем. В целом же уравнение (10.2a) линейно относительно  $\vartheta$ , поэтому для исследования характерных свойств его решений мы и выберем распределение с гауссовым пространственным профилем распределения в скаляра в пространстве. Как мы сейчас увидим, уравнение (10.2a) сохраняет гауссов вид распределения в скаляра в пространстве.

Итак, будем считать, что поле  $\vartheta$  в произвольный момент времени  $t > 0$  имеет вид

$$\vartheta(t, \mathbf{r}) = \frac{l^d \vartheta_0}{\sqrt{\det \hat{I}(t)}} \exp \left( -\frac{\mathbf{r}^T \hat{I}^{-1}(t) \mathbf{r}}{2} \right), \quad (10.3a)$$

В (10.3a)  $\vartheta_0$  — интенсивность скаляра в начале координат,  $d = 2, 3$  — размерность пространства,  $l$  — характерная длина. Для простоты будем считать, что в начальный момент времени распределение в пространстве изотропно, так что

$$I_{ik} \Big|_{t=0} = l^2 \delta_{ik} \quad (10.3b)$$

Матрица  $\hat{I}$  является матрицей “момента инерции” поля  $\vartheta$ , делённого на его “массу”:

$$I_{il}(t) = \frac{\int \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) r_i r_l d^d r}{\int \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) d^d r}, \quad (10.3c)$$

Распределение скаляра в пространстве имеет вид кляксы (применяем этот эпитет считая, что под скаляром может подразумеваться растворимый краситель) эллипсоидальной формы, центр которого совпадает с началом координат. Симметричную матрицу  $\hat{I}$  имеет смысл диагонализировать,

$$\hat{I} = \hat{N} \hat{\Lambda} \hat{N}^T \quad (10.3d)$$

Длины главных оси эллипсоида задаются диагональной матрицей  $\hat{\Lambda}$ , а ортогональная матрица  $\hat{N}$  задаёт поворот направления главных осей относительно осей координатной системы лабораторной системы координат. Удобно перейти повернуть систему отсчёта так, чтобы направления главных осей эллипсоида совпадали с направлением осей координат. Такая система будет вращаться с угловой скоростью  $\hat{\Omega}$ :

$$\hat{\zeta}^n = \hat{N}^T \zeta \hat{N}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \hat{N}^T \mathbf{r}, \quad \frac{d\hat{N}}{dt} = \hat{N} \hat{\Omega}. \quad (10.3e)$$

Установим динамику матрицы  $\hat{I}$ . Подставим анзац (10.3a) в уравнение (10.2a). Получим (считаем коэффициент при  $\vartheta/2$ , где  $\vartheta$  есть (10.3a)):

$$2\kappa \operatorname{tr} \hat{\Lambda}^{-1} - \frac{1}{\det \hat{\Lambda}} \frac{d(\det \hat{\Lambda})}{dt} = \quad (10.3f)$$

$$= \mathbf{r}^T \hat{I}^{-1} \left( \hat{\zeta} \hat{I} + \hat{I} \hat{\zeta}^T + 2\kappa - \frac{d\hat{I}}{dt} \right) \hat{I}^{-1} \mathbf{r}.$$

В (10.3f) должны быть равны нулю отдельно левая и правая части, поскольку радиус-вектор  $\mathbf{r}$  произволен. Таким образом, динамика матрицы  $\hat{I}$  задаётся уравнением

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{\zeta} \hat{I} + \hat{I} \hat{\zeta}^T + 2\kappa. \quad (10.3g)$$

Из уравнения (10.3g) следует, что левая часть уравнения (10.3f) также равна нулю, то есть анзац (10.3a) действительно даёт решения исходного уравнения (10.2a).

Если пренебречь вязкостью, то решение (10.3g) строится из матрицы  $\hat{W}$  аффинного преобразования  $\hat{W}$  (9.24c):

$$\hat{I}(t) = \hat{W}\hat{W}^T. \quad (10.3h)$$

Решение (10.3h) означает, что клякса скаляра деформируется исключительно за счёт переноса потоком жидкости. На каждой лагранжевой траектории концентрация остаётся неизменной согласно (10.1c).

Получим теперь из уравнения (10.3g) уравнения на размеры кляксы (10.3a), т.е. на матрицу  $\hat{\Lambda}$ , и на ориентацию кляксы, т.е. на матрицу  $\hat{N}$ , смотри (10.3d,10.3e). Схема получения та же, что и для матриц из сингулярного разложения матрицы  $\hat{W}$  (9.24d), смотри § 9-7. Уравнение (10.3g) можно переписать в виде

$$\frac{d\hat{\Lambda}}{dt} - \hat{\Omega}\hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}\hat{\Omega} = \hat{\Lambda}\hat{\zeta}^{n,T} + \hat{\zeta}^n\hat{\Lambda} + 2\kappa, \quad (10.3i)$$

сравни с (9.24g). Диагональные матричные элементы этого уравнения суть уравнения на  $\hat{\Lambda}$ ,

$$\frac{d\Lambda_{ii}}{dt} = 2\zeta_{ii}^n \Lambda_{ii} + 2\kappa. \quad (10.3j)$$

Недиагональные матричные элементы уравнения (10.3i) определяют скорость вращения кляксы, ...

### 10-2.0.1 Двумерное течение

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1/L_+^2 & 0 \\ 0 & 1/L_-^2 \end{pmatrix}, \quad (10.3k)$$

$$\hat{N} = \exp(\hat{\epsilon}\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Получим теперь динамические уравнения на  $L_-$ ,  $L_+$ ,  $\psi$ . Отдельно приравнявая нулю её диагональные и недиагональные матричные элементы, приходим к системе уравнений

$$\frac{d \ln L_{\pm}}{dt} = \pm \left( \sigma^{xx} \cos(2\psi) + \frac{\sigma^{xy} + \sigma^{yx}}{2} \sin(2\psi) \right) + \kappa L_{\pm}^{-2}, \quad (10.3l)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\sigma^{yx} - \sigma^{xy}}{2} + \frac{L_+^2 + L_-^2}{L_+^2 - L_-^2} \left( \frac{\sigma^{yx} + \sigma^{xy}}{2} \cos(2\psi) - \sigma^{xx} \sin(2\psi) \right).$$

### 10-2.1 Перемешивание в постоянном сдвиговом течении

Продemonстрируем, как происходит перемешивание в ламинарном потоке, в качестве которого возьмём сдвиговой поток. С одной стороны, сдвиговой поток, остающийся неизменным вдоль лагранжевых траекторий,

реализуется при течении вдоль ровной стенки и в аксиально-симметричном вихре. Других примеров в том же смысле постоянных потоков найти трудно в силу геометрических ограничений. С другой стороны, постоянный сдвиговой поток является вырожденным — в нём экспонента Ляпунова равна нулю. Этим он сильно отличается от потоков с хаотической составляющей, где экспонента Ляпунова всегда положительна.

$$(\partial_t - \Sigma\eta\partial_{\xi})\vartheta = \kappa\Delta\vartheta + f. \quad (10.4a)$$

В Фурье-пространстве это уравнение переписывается как

$$(\partial_t + \Sigma k_{\xi}\partial_{k_{\eta}})\vartheta_{\mathbf{k}} = -\kappa\mathbf{k}^2\vartheta_{\mathbf{k}} + f_{\mathbf{k}}. \quad (10.4b)$$

**Роль адвекции.** Для исследования свойств решения уравнений (10.4a,10.4b) положим сначала вязкость и внешнюю силу равными нулю и будем решать задачу с начальными условиями при  $t = 0$ . Субстанциональная производная создаёт движение по характеристикам

$$\xi'(t) = \xi - \Sigma\eta t \quad (10.4c)$$

$$k'_{\eta}(t) = k_{\eta} + \Sigma t k_{\xi}, \quad \mathbf{k}'(t) = \{k_{\xi}, k'_{\eta}(t), k_z\}.$$

Рассмотрим две лагранжевы частицы '1' и '2', которые исходно были разделены расстоянием порядка корреляционной длины  $L_f$  силы  $f$ , причём проекция расстояния на направлении возрастания сдвигового течения была того же порядка,  $\xi_2 - \xi_1 \sim L_f$ . Из уравнения (10.4c), записанного для координат, следует, что на больших временах  $\Sigma t \gg 1$  расстояние между этими частицами будет  $\sim L_+$ ,

$$L_+ = \Sigma t \cdot L_f. \quad (10.4d)$$

Теперь рассмотрим элемент жидкости, исходно являющимся кругом и имеющим диаметр  $\sim L_f$ . Этот элемент жидкости исходно был заполнен определённым значением завихренности. В дальнейшем эта область претерпевает деформацию и с изменением площади. Будем называть эту область *кляксой*. Если отсутствует вязкость, то в процессе эволюции согласно (10.4c) площадь кляксы не будет меняться. Поскольку больший размер кляксы оценивается как  $L_+$  (10.4d), то его размер в ортогональном направлении оценивается как  $\sim L_-$ ,

$$L_- = \frac{L_f}{\Sigma t}. \quad (10.4e)$$

Клякса оказывается сильно вытянутой, поскольку  $L_+ \gg L_-$ . При этом угол её наклона относительно направления линий тока сдвигового течения оценивается как  $\sim 1/(\Sigma t)$ .

• **Задача 1:** В качестве начальных условий для уравнения (10.4b) с нулевой вязкостью и отсутствующей силой примем, что завихренность  $\vartheta$  отлична от нуля только внутри круга радиуса  $L_f$ , где она имеет всюду одно и то же значение  $\vartheta_0$ :

$$\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0 \theta(L_f - \rho), \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (10.4f)$$

Начальное условие (10.4f) моделирует то, что случайная сила  $f$  изотропна в пространстве, а её корреляционная длина равна  $L_f$ . Найдите распределение завихренности в последующие моменты времени.

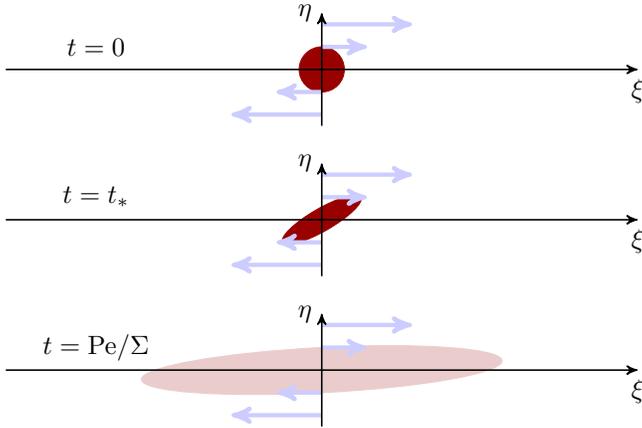


Рис. 10.1 Схематическое изображение процесса перемешивания кляксы в сдвиговом потоке. Было выбрано значение числа Пекле  $Pe \sim 10$ .

**Роль диффузии (вязкости).** Теперь восстановим диффузию в уравнении (10.4a, 10.4c). Диффузия начнёт действовать в момент времени  $t_*$ , когда сравняется её скорость действия на расстоянии  $L_-$  (10.5b) со скоростью убывания поперечного размера  $L_-$ :

$$t_* : \frac{\kappa}{L_-^2} \sim \frac{1}{L_-} \frac{dL_-}{dt}, \Rightarrow t_* \sim \frac{(Pe)^{1/3}}{\Sigma}. \quad (10.4g)$$

После этого момента, при  $t \gg t_*$ , поперечный размер кляксы будет расти диффузионным образом,

$$t \gg t_* : L_- \sim \sqrt{\Sigma t / Pe} L_f. \quad (10.4h)$$

Интенсивность кляксы вместе с тем начнёт падать обратно пропорционально её теперь растущей площади

$\sim L_- L_+$ . На временах  $t \gg Pe/\Sigma$  размер кляксы в поперечном направлении линия тока превысит её исходный размер  $L_f$ . Поэтому на таких, самых больших временах, горизонтальный размер кляксы растёт быстрее чем (10.4d),

$$t \gg Pe/\Sigma : \frac{dL_+}{dt} \sim \Sigma L_-, \quad L_+ \sim \frac{(\Sigma t)^{3/2}}{Pe} L_f. \quad (10.4i)$$

• **Задача 2:** Решите уравнение на эволюцию пассивно переносимого скаляра  $\vartheta$  сдвиговым течением, подверженному диффузии (уравнение (10.4a)) с начальным условием

$$\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0 \exp(-\rho^2/2L_f^2) \quad (10.5a)$$

и отсутствующей внешней силой  $f$ . Сила сдвига велика в смысле (10.7). Решите задачу одним из способов:

i) Решите уравнение (10.4a) методом характеристик в Фурье-пространстве, а потом перейдите в координатное пространство для окончательного ответа.

ii) Воспользуйтесь тем, что начальное условие (10.5b) есть гауссово распределение в пространстве, а уравнение (10.4a) сохраняет общий вид гауссового распределения. В качестве параметров гауссового распределения естественно выбрать собственные значения  $L_-$ ,  $L_+$  и угол поворота  $\psi$  главных осей относительно декартовой системы координат  $O\xi\eta$ . Напишите динамические уравнения на эти три переменные.

• **Задача 3:** Решите уравнение на эволюцию кляксы пассивно переносимого скаляра  $\vartheta$  постоянным течением, задающимся линейным профилем в пространстве  $v^x = \Sigma y$ ,  $v^y = \varsigma x$ , причём  $\Sigma\varsigma > 0$  и  $\Sigma \gg \varsigma$ , подверженному диффузии с коэффициентом  $\kappa$  с начальным условием

$$\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0 \exp(-\rho^2/2L_f^2) \quad (10.5b)$$

и отсутствующей внешней силой  $f$ . Диффузия слаба в смысле  $L_f^2 \sqrt{\varsigma \Sigma} / \kappa \gg 1$ . Определите зависимости от времени для угла ориентации кляксы  $\psi$  и её главных полуосей  $L_+$ ,  $L_-$ .

### §10-3. Парная корреляционная функция пассивного скаляра

Исследуем динамику парной корреляционной функции скаляра. Будем считать его пассивным, т.е. не влияющем на статистические свойства скорости. Мы будем считать течение несжимаемым. В общем случае невозможно выписать замкнутое уравнение на корреляционную функцию; для ситуации общего положения это некорректная задача. Это удаётся сделать только при достаточно узких предположениях.

Если жидкость несжимаема,  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , то (10.1a) можно переписать в видах

$$\partial_t \vartheta + (\mathbf{v} \nabla) \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + f. \quad (10.6a)$$

Предположим, что статистика поля скорости  $\mathbf{v}$  такова, что его можно разделить на крупномасштабную и медленно меняющуюся во времени составляющую  $\mathbf{U}$  и на мелкомасштабную и быстро меняющуюся во времени составляющую  $\mathbf{u}$ , причём вреднее по времени значение

$$\langle \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) \rangle_t = 0. \quad (10.6b)$$

Выберем некоторую лагранжеву систему координат в поле  $\mathbf{U}$ . В этой системе мы ограничимся относительно малыми расстояниями, так что крупномасштабную часть скорости можно описать линейным профилем,

$U^i = \Sigma^{ik} r^k$ . Полная скорость тогда представляется в виде

$$v^i = U^i + u^i = \Sigma^{ik} r^k + u^i, \quad (10.6c)$$

причём статистика пульсаций  $\mathbf{u}$  однородна в пространстве. В частности, разновременная структурная функция поля  $\mathbf{u}$  (9.3c) имеет зависимость только от разности координат  $\mathbf{r}$ .

Возбуждающая неоднородности пассивного скаляра сила  $f$  случайна во времени и пространстве. Её средняя величина равна нулю, а парная корреляционная функция однородная в пространстве и времени,

$$\langle f(t_1, \mathbf{r}_1) f(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = F_f(t, \mathbf{r}), \quad (10.6d)$$

$$t = t_2 - t_1, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Расстояние  $L_f$ , на котором убывает корреляционная функция  $F_f(t, \mathbf{r})$ , мы будем называть масштабом накачки. Будем считать, что время корреляции силы мало как по сравнению с характерным временем изменения корреляционной функции  $F$  самого скаляра. Тогда достаточно полагать силу коротко-коррелированной во времени, так что в Фурье-представлении

$$F_f(t, \mathbf{k}) = 2\epsilon_\vartheta k^2 \chi_k \delta(t), \quad (10.6e)$$

$$\int (d^d k) \chi_k = 1, \quad \int (d^3 k) k^2 \chi_k = \frac{1}{L_f^2}.$$

Формальное эволюционное уравнение на корреляционную функцию  $F$  (10.1e) имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t F &= \kappa(\Delta_1 + \Delta_2)F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \\ &- (U_1^i \partial_{1i} + U_2^i \partial_{2i})F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \\ &- \partial_{1i} \langle u_1^i \vartheta(t, \mathbf{r}_1) \vartheta(t, \mathbf{r}_2) \rangle - \partial_{2i} \langle u_2^i \vartheta(t, \mathbf{r}_1) \vartheta(t, \mathbf{r}_2) \rangle + \\ &+ \langle f(t, \mathbf{r}_1) \vartheta(t, \mathbf{r}_2) \rangle + \langle \vartheta(t, \mathbf{r}_1) f(t, \mathbf{r}_2) \rangle. \end{aligned} \quad (10.6f)$$

Это уравнение, вообще говоря, нелокально по времени. Локальность по времени достигается в пределе, когда время  $\tau_\theta$  изменения корреляционной функции скаляра  $F$  велико по сравнению со временем  $\tau_u$  изменения поля скорости  $\mathbf{u}$ . Пусть действительно имеет место такое разделение времён. Заметим, что если в третьей строчке (10.6f) под знаками среднего не учитывать взаимную корреляцию между полем скорости и скаляром, то мы получим нуль вследствие (10.6b). Проследим эволюцию поля  $\vartheta$  за время  $t - t_0$ , которое лежит между временами корреляций:

$$\tau_u \ll t - t_0 \ll \tau_\theta. \quad (10.6g)$$

Изменение поля  $\vartheta$  за это время является малой поправкой, возникающей вследствие переноса переменной ча-

стью  $\mathbf{u}$  поля скорости и действия источника  $f$ :

$$\begin{aligned} \vartheta(t, \mathbf{r}) &\approx \vartheta(\mathbf{r}, t_0) - \int_{t_0}^t dt' (\mathbf{u}(t', \mathbf{r}) \cdot \nabla) \vartheta(\mathbf{r}, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t dt' f(\mathbf{r}, t') + \dots \end{aligned} \quad (10.6h)$$

Многообразием мы обозначили вклады от диффузии и крупномасштабного поля скорости, которые сейчас нам не важны. Теперь, в силу разделения времён (10.6g), в качестве временного аргумента у полей  $\vartheta$  мы можем взять  $t_0$  вместо  $t$ . Тогда статистика пассивного скаляра становится независимой от статистики поля скорости и мы можем провести независимые усреднения:

$$\begin{aligned} \partial_t F &\rightarrow \partial_{1i} \int_{t_0}^t dt' \langle u_1^i (u_1^k \partial_{1k} + u_2^k \partial_{2k}) \rangle \langle \vartheta_1 \vartheta_2 \rangle + \\ &+ \partial_{2i} \int_{t_0}^t dt' \langle u_2^i (u_1^k \partial_{1k} + u_2^k \partial_{2k}) \rangle \langle \vartheta_1 \vartheta_2 \rangle + \\ &+ \int_{t_0}^t dt' \langle f_1' f_2 + f_1 f_2' \rangle \end{aligned} \quad (10.6i)$$

Вернёмся теперь к сделанному ранее предположению о разделении масштабов. Расстояние  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  между точками корреляционной функции должно быть мало по сравнению с масштабами изменения как среднего течения  $U^i$ , так и статистических свойств мелкомасштабной турбулентности  $\mathbf{u}$ . Тогда корреляционная функция зависит главным образом только от  $\mathbf{r}$ . Чтобы формализовать это и исключить среднюю координату  $\mathbf{R}$ , перейдя к переменным  $\mathbf{r}, \mathbf{R}$  (9.5c). Пренебрегая производными по  $\mathbf{R}$ , правую часть (10.6i) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial_i \int_{t_0}^t dt' \langle u_1^i u_1^k - u_1^i u_2^k - u_2^i u_1^k + u_2^i u_2^k \rangle \partial_k F + \\ + \int_{t_0}^{2t_0-t} F_f(t, \mathbf{r}) = \partial_i D^{ij} \partial_j F + \epsilon_\vartheta \chi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (10.6j)$$

где тензор диффузии  $D^{ik}$  выражается через интеграл от разновременной структурной функции скорости

$$D^{ij}(\mathbf{r}) = \int_{t_0}^t dt' S_L^{ij}(t - t', \mathbf{r}), \quad (10.6k)$$

а сама разновременная структурная функция скорости  $S_L^{ij}$  определена в (9.3c), где в качестве лагранжевой траектории надо брать траекторию в среднем течении  $U$ .

В итоге мы приходим к уравнению

$$\partial_t F = (2\kappa\Delta - \Sigma^{ij} r^j \partial_i) F + \partial_i D^{ij} \partial_j F + 2\epsilon_\vartheta \chi. \quad (10.6l)$$

В Фурье-представлении уравнение на парный коррелятор переписывается в виде

$$\begin{aligned} \partial_t F_{\mathbf{k}} = & (-2\kappa\mathbf{k}^2 + \Sigma^{ij} k^i \partial_{k^j}) F_{\mathbf{k}} + \\ & - k^i \int D_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{ij} q^j F_{\mathbf{q}}(d^d q). \end{aligned} \quad (10.6m)$$

### 10-3.1 Предельные поведения процесса перемешивания

#### 10-3.1.1 Турбулентная диффузия

Положим сейчас, что поле скорости имеет длину корреляции, значительно меньшую длины корреляции пассивного скаляра. В этом случае в уравнении (10.6l) можно считать коэффициент диффузии  $D^{ij}$  не зависящим от координат, и мы приходим к уравнению

$$\partial_t F = (2\kappa\delta^{ij} + D^{ij}) \partial_i \partial_j F - \Sigma^{ij} r^j \partial_i F. \quad (10.6n)$$

Если же предположить изотропность статистики скорости, то  $D^{ij} = D\delta^{ij}$ , и мы получаем перенормировку коэффициента диффузии. Об этом говорят как о турбулентной диффузии.

#### 10-3.1.2 Перемешивание в гладком поле скорости

Пусть среднее течение отсутствует,  $\Sigma^{ik} = 0$ . Рассмотрим предел большого числа Шмидта (10.1d),  $Sc \gg 1$ , т.е. слабой диффузии. Тогда возможна ситуация, когда исходный размер  $L_f$  клякс скаляра находится под масштабом  $r_\eta$ , ниже которого поле скорости  $\mathbf{v}$  остаётся линейным в пространстве, и больше диффузионного масштаба  $r_\kappa = \sqrt{\kappa/\lambda}$ , где  $\lambda$  – экспонента Ляпунова. В частности, безразмерный параметр  $Pe$ , называемый числом Пекле, велик:

$$r_\kappa \ll L_f \ll r_\eta, \quad Pe = \frac{L_f^2}{r_\kappa^2} \gg 1. \quad (10.7)$$

Исследуем, как будет устроена корреляционная функция пассивного скаляра на расстояниях  $r$ , много меньших корреляционной длины поля скорости жидкости,  $r \ll r_\eta$ . Перейдём в лагранжеву систему координат, начало которой движется вместе с некоторым зафиксированным элементом жидкости. Уравнение на скаляр в окрестности начала выбранной нами системы отсчёта имеет вид

$$\partial_t \theta = -\zeta^{ij} r^j \partial_i \theta + \kappa\Delta + f, \quad (10.8)$$

где  $\zeta^{ij}$  – матрица градиентов скорости (9.8b). Будем считать для простоты, что статистика поля скорости статистически изотропна, так что структурная функция

на интересующих нас масштабах имеет вид (9.8d). Тогда и корреляционная функция скаляра имеет изотропную зависимость. Уравнение (10.6l) на парную корреляционную функцию

$$\partial_t F(r) = (D(r^2 \partial_r^2 + (d+1)r \partial_r) + 2\kappa\Delta) F(r) + \epsilon_\vartheta \chi(r), \quad (10.9)$$

где  $d$  – размерность пространства, а коэффициент

$$D = \int dt \Sigma_L(t). \quad (10.10)$$

### 10-3.2 Каскады скаляра в турбулентных потоках

Рассмотрим каскад пассивного скаляра в инерционном интервале трёх-мерного турбулентного или в энергетическом инерционном интервале двумерного потоков, см. §§ 9-4, 9-5 и § 9-6. Динамика скаляра описывается уравнением (10.6a). Предполагается следующая картина: некоторый статистически однородный во времени внешний источник  $f$  постоянно производит всё новые флуктуации скаляра на масштабе  $L_f$ , который значительно превышает диффузионный масштаб  $r_\kappa$ , на котором диффузия оказывается существенной в динамике скаляра. Диффузия достаточно мала, так что диффузионный масштаб мал по сравнению с интегральным масштабом,  $r_\kappa \ll L$ . Статистика как скорости, так и скаляра предполагается однородной в пространстве. Будем рассматривать поведение корреляционной функции скаляра в логарифмически большом промежутке масштабов

$$\max(r_\kappa, r_\eta) \ll r \ll \min(L, L_f), \quad (10.11a)$$

где, напомним,  $r_\eta$  (9.15l) есть колмогоровский масштаб. Покажем, что в этом интервале корреляционные функции скаляра характеризуются скейлинговым законом.

Сначала установим уравнение на средний квадрат вариаций скаляра:

$$\partial_t \frac{\langle \vartheta^2 \rangle}{2} = \epsilon_\vartheta - \kappa \langle (\text{grad } \vartheta)^2 \rangle. \quad (10.11b)$$

В статистически стационарной ситуации производная по времени равна нулю, поэтому скорость накачки  $\epsilon_\vartheta$  равна скорости диссипации  $\kappa \langle (\nabla \vartheta)^2 \rangle$ . Если же возбуждение флуктуаций скаляра внезапно прекратится, то сразу после этого скорость убывания средней его вариации будет равна  $\epsilon_\vartheta$ .

Определим теперь структурную функцию скаляра  $S_{\vartheta\vartheta}$  и его спектр флуктуаций согласно равенствам

$$\begin{aligned} S_{\vartheta\vartheta}(r) &= \langle (\delta\vartheta(\mathbf{r}))^2 \rangle = 2(F(0) - F(r)), \\ \delta\vartheta(\mathbf{r}) &= \vartheta(\mathbf{r}_2) - \vartheta(\mathbf{r}_1), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \end{aligned}$$

$$\frac{\langle \vartheta^2 \rangle}{2} = \int_0^\infty dk E_{\vartheta k}. \quad (10.11c)$$

Структурная функция  $S_{\vartheta\vartheta}$  должна быть линейна по скорости диссипации вариаций скаляра  $\epsilon_\vartheta$ , поскольку обе эти величины квадратичны по  $\vartheta$ . Из соображений размерности получаем теперь скейлинговый закон

$$S_{\vartheta\vartheta} \sim \epsilon_\vartheta \epsilon^{-1/3} r^{2/3}. \quad (10.11d)$$

Поскольку показатель степени здесь совпадает с показателем степени для квадрата вариации скорости  $\langle(\delta v)^2\rangle$ , смотри (9.15g), то спектр вариаций скаляра  $E_{\vartheta k}$  имеет ту же степенную зависимость (9.15m):

$$E_{\vartheta k} = C_\vartheta \epsilon_\vartheta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (10.11e)$$

Числовая константа  $C_\vartheta$  носит имя Обухова-Коррзина. Её значение для трёхмерного каскада согласно результатам численного счёта и эксперимента  $C_\vartheta \approx 0.68$  [Watanabe & Gotoh, 2004].

Пусть число Шмидта (10.1d) мало,  $Sc = \nu/\kappa \ll 1$ . Тогда диффузионный масштаб  $r_\kappa$  лежит в инерционном интервале турбулентности,  $r_\kappa \gg r_\eta$ . Оценку для  $r_\kappa$  можно получить из исходного уравнения (10.6a), определив его как масштаб, на котором диффузионный член становится порядка адвекционного слагаемого  $(\mathbf{v}\nabla)\vartheta$ :

$$r_\kappa = \kappa^{3/4}/\epsilon^{1/4}. \quad (10.11f)$$

Как и должно быть, этот масштаб значительно превышает масштаб Колмогорова  $r_\eta$  (9.15l). Оценки (10.11d, 10.11f) впервые были получены в [Обухов, 1949].

Теперь получим точное соотношение для корреляционных функций, аналогичное уравнению Кармана-Ховарда-Монина (9.18e). Для этого придётся также определить (смешанную) структурную функцию третьего порядка  $S_{v\vartheta\vartheta}^i$  и среднее  $Q^i$

$$S_{v\vartheta\vartheta}^i(\mathbf{r}) = \langle \delta v^i(\mathbf{r})(\delta\vartheta(\mathbf{r}))^2 \rangle, \quad Q^i(\mathbf{r}), \quad (10.11g)$$

как это делалось при изучении статистики скорости. Обе этих величины направлены по радиус-вектору,

$$\begin{aligned} S_{v\vartheta\vartheta}(\mathbf{r}) &= \mathbf{n} S_{v\vartheta\vartheta}(r), & S_{v\vartheta\vartheta}(r) &= \left\langle (\delta v(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n})(\delta\vartheta(\mathbf{r}))^2 \right\rangle, \\ Q(\mathbf{r}) &= \mathbf{n} Q(r), & \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned} \quad (10.11h)$$

Имеет место равенство

$$\partial_i S_{v\vartheta\vartheta}^i = -4\partial_i Q^i, \quad (10.11i)$$

аналогичное равенству (9.18b) для структурной функции скорости. Теперь, используя соотношения (9.5c), приходим к уравнению

$$\partial_t F = \frac{1}{2} \partial_i S_{v\vartheta\vartheta}^i + 2\kappa \Delta F + 2\epsilon_\vartheta \chi, \quad (10.11j)$$

сравни с уравнением (9.18e). В статистически стационарном состоянии производная по времени  $\partial_t F = 0$ .

Далее, уравнение (10.11j) с учётом сферической симметрии входящих в него функций может быть переписано в виде

$$\partial_r \left( r^{d-1} (S_{v\vartheta\vartheta}/2 - \kappa \partial_r S_{\vartheta\vartheta}) \right) = r^{d-1} (\partial_t F - 2\epsilon_\vartheta \chi), \quad (10.11k)$$

где  $d$  — размерность пространства. На малых масштабах  $r \ll L_f$  пространственный фактор у корреляционной функции (10.6e) внешнего источника  $\chi = 1$ . На этих масштабах однократное интегрирование (10.11k) при условии  $\partial_t F = 0$  приводит к

$$S_{v\vartheta\vartheta} = -\frac{4r\epsilon_\vartheta}{d} - 4\kappa \frac{dF}{dr} = -\frac{4r\epsilon_\vartheta}{d} + 2\kappa \frac{dS_{\vartheta\vartheta}}{dr}. \quad (10.11l)$$

Это соотношение было впервые получено в [Яглом, 1949].

На масштабах больше диффузионного,  $r \gg r_\kappa$ , в правой части (10.11l) последнее, диффузионное слагаемое относительно мало. Поэтому структурная функция  $S_{v\vartheta\vartheta}(r)$  (10.11h) ведёт себя линейно с расстоянием,

$$S_{v\vartheta\vartheta} = -\frac{4}{d} \epsilon_\vartheta r. \quad (10.11m)$$

Отсюда, зная, что разница скоростей имеет скейлинговое поведение (9.15g),  $\delta v \sim (\epsilon r)^{1/3}$ , снова получаем оценку для структурной функции второго порядка (10.11d).

## §10-4. Тепловая конвекция в сосуде.

Чаще всего тела, в том числе жидкости, расширяются при нагреве. Если жидкость нагревать снизу, а сверху охлаждать, то нижние слои жидкости вследствие нагрева будут становиться легче. В результате сначала возникнет неустойчивость, затем разовьётся турбулентное течение, которое будет путём конвекции передавать тепло от нижней границы к верхней. Задача изучения статистики такого течения в замкнутом объёме носит имя конвекции Релея-Бенара (*Rayleigh-Bénard*

*convection*). Соответствующая неустойчивость связывается с теми же именами. Литература: [Lohse & Shishkina, 2024].

### 10-4.0.1 Безразмерные параметры

Определим стандартные безразмерные параметры, используемые при анализе характера термического течения несжимаемой жидкости. Напомним, что отноше-

ние коэффициентов кинематической вязкости и теплопроводности

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi} \quad (10.12a)$$

называется *числом Прандтля* (смотри выше (10.1d)).

Пусть характерный масштаб течения в направлении изменения потенциала равен  $H$ , потенциал меняется на величину  $\sim gH$  (величина  $\mathbf{g} = -\text{grad } \varphi$  есть ускорение свободного падения). Характерная разность температур равна  $\Theta$ . Отношение

$$\frac{\alpha \tilde{T} \text{grad } \varphi}{\nu \Delta v} \cdot \frac{(v \nabla) \tilde{T}}{\chi \Delta \tilde{T}} \sim \text{Ra} = \frac{g \alpha \Theta H^3}{\nu \chi} \quad (10.12b)$$

называется *числом Рейля* (*Rayleigh number*). Число Рейля есть произведение двух отношений — отношения второго (вынуждающего течение) и третьего (вязкостного) членов в уравнении Навье-Стокса (2.17h) и отношения конвективного и диффузионного членов в уравнении на перенос температуры (2.17k).

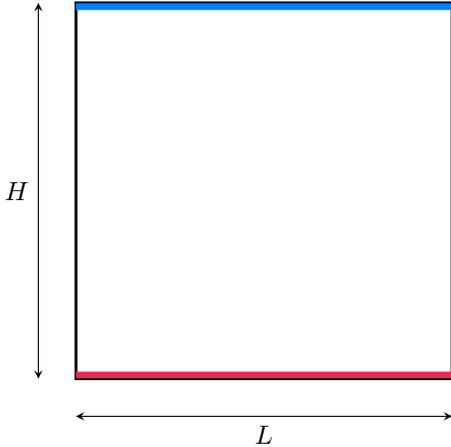


Рис. 10.2 Схема эксперимента с конвекцией Релея-Бенара

*Числом Нуссельта*  $\text{Nu}$  (*Nusselt number*) называется отношение полного потока тепла (*convective heat transfer*) к диффузионному потоку тепла (*conductive heat transport, that is diffusion (conduction) of heat*). Полный поток тепла является суммой переноса тепла течением жидкости (*advection of heat*) и диффузионного потока тепла. Предполагается, что на границе течения  $\Gamma$  выполняется по крайней мере условие непротекания — проекция скорости на нормаль  $\mathbf{n}$  к границе равна нулю. Поэтому полный поток тепла совпадает с полным потоком энергии  $J^{E+K}$  (2.10h), являющейся суммой внутренней энергии и кинетической энергии течения. Поскольку именно полная энергия является сохраняющейся величиной, то её может быть удобнее использовать в качестве объекта изучения. Диффузионную часть потока тепла можно оценить через разность температур  $\Theta$  и характерный размер системы  $H$ , то есть как  $\alpha \Theta / H$ . Таким

образом, число Нуссельта

$$\text{Nu} = \frac{\langle j^{E+K} \rangle}{\alpha \Theta / H} = \frac{H \langle (j^{E+K}) / \rho_0 C_p \rangle}{\chi \Theta}. \quad (10.12c)$$

Поэтому, если вычислять поток энергии на границе течения, то ненулевым оказывается только диффузионный вклад в диссипативную часть потока (2.10i):

$$J^{E+K} = -\alpha \int d^2 S \partial_n T \Big|_{\Gamma}. \quad (10.12d)$$

В дальнейшем принимаем, что параметры течения таковы, что поток энергии по всему объёму определяется только потоком тепла  $J^E$ , то есть для потока энергии применимо выражение (2.17n). В рамках этого приближения возможно получить точные соотношения между некоторым средними величинами. Среднее по горизонтальному сечению от потока тепла неизменно по вертикали, то есть

$$\langle j^E \rangle_{\perp} = \rho_0 C_p \langle \tilde{T} v_z \rangle_{\perp} - \alpha \partial_z \langle \tilde{T} \rangle_{\perp}. \quad (10.12e)$$

Теперь усредним (10.12e) также и по вертикали. Используя определение (10.12c), получаем соотношение для средней по объёму адвекционной части потока тепла:

$$\text{Nu} - 1 = \frac{H}{\alpha \Theta} \langle \tilde{T} v_z \rangle. \quad (10.12f)$$

Усредним теперь уравнение (2.17m) по объёму. Получим соотношение для средней скорости диссипации кинетической энергии за счёт действия вязкости:

$$\epsilon = \nu \langle \partial_i v^k \partial_i v^k \rangle = \alpha g \langle \tilde{T} v_z \rangle = \frac{\nu^3 \text{Ra} (\text{Nu} - 1)}{H^4 \text{Pr}^2}. \quad (10.12g)$$

Теперь проинтегрируем уравнение на средний квадрат вариации температуры (2.17l) по объёму и усредним его по времени. В потоке ненулевой вклад даст только диффузионная часть потока вариаций температуры. С учётом того, что температура на границах фиксирована, эта часть потока оказывается пропорциональной потоку тепла. Получим соотношение на среднюю скорость диссипации вариаций температуры:

$$\epsilon_T \equiv \chi \langle (\nabla \tilde{T})^2 \rangle = \Theta \chi \partial_z \langle \tilde{T} \rangle_{\Gamma} = \frac{\chi \Theta^2}{H^2} \text{Nu}. \quad (10.12h)$$

Соотношения (10.12g, 10.12h) были получены независимо в [Сорокин, 1954], [Malkus, 1954].

#### 10-4.1 Режим с ламинарным кинетическим пограничным слоем

Число Рейнольдса не слишком большое,  $\text{Re} \lesssim 10^5$ . Тогда пограничный слой ламинарный, т.е.

$$\lambda_u \sim \text{Re}^{-1/2} H, \quad \text{Re} = \frac{VH}{\nu}. \quad (10.13a)$$

В объёме характерное значение амплитуды скорости равно  $V$ .

Уравнение непрерывности:

$$\partial_\alpha v_\alpha + \partial_z v_z = 0, \quad (10.13b)$$

Перенос скаляра

$$\partial_\alpha (v_\alpha \vartheta) + \partial_z (v_z \vartheta) = \kappa \partial_z^2 \vartheta. \quad (10.13c)$$

Вследствие уравнения непрерывности (10.13b), слагаемые в левой части (10.13c) одного порядка.

**Предел относительно сильной диффузии**, число Прандтля мало,  $\text{Pr} \ll 1$ . Тогда толщина теплового пограничного слоя мала относительно кинетического пограничного слоя,  $\lambda_\vartheta \ll \lambda_u$ . Поэтому на  $z \sim \lambda_\vartheta$  оценка для горизонтальной скорости  $v_\tau \sim (\lambda_\vartheta/\lambda_u)V$ . Запишем условие того, что левая и правая части (10.13c) сравниваются:

$$\frac{\lambda_\vartheta V}{H\lambda_u} \sim \frac{\kappa}{\lambda_\vartheta^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\vartheta = \text{Re}^{-1/2} \text{Pr}^{-1/3} H. \quad (10.13d)$$

Глава 11

# ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

## §11-1. Потенциальное обтекание тела

Рассматриваем несжимаемую идеальную жидкость, в которой движется тело со скоростью  $\mathbf{V}$ . Форма тела неизменна во времени, оно не вращается. На далёких от тела расстояниях жидкость покоится. Цель настоящего рассмотрения — определить скорость вокруг тела и силы, действующие на него, в предположении, что течения жидкости является чисто потенциальным. Исчерпывающее теоретическое рассмотрение потенциального обтекания тела произвольной изменяющейся во времени формы проведено в работе [Galper & Miloh, 1995].

Удобно использовать две системы отсчёта. Первая система отсчёта связана с телом: в ней оно неподвижно и находится в начале координат. В этой системе отсчёта жидкость имеет скорость течения  $\mathbf{u}$ , которая на далёких расстояниях от тела стремится к значению  $-\mathbf{V}$ . Поэтому при удалении от тела асимптотикой для потенциала является

$$\phi_v = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}). \quad (11.1a)$$

Полный потенциал скорости и скорость жидкости  $\mathbf{u}$  равны

$$\phi + \phi_v, \quad \mathbf{u} = -\text{grad } \phi - \mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \quad (11.1b)$$

Скорость  $\mathbf{v}$  является скоростью жидкости во второй системе отсчёта, в которой жидкость на далёких расстояниях покоится, а тело движется со скоростью  $\mathbf{V}$ . Удобно считать, что в момент времени  $t = 0$  тело находится в начале координат и в системе отсчёта, связанной с жидкостью. В этой системе координат потенциал

$$\phi = \phi(\mathbf{r} - \mathbf{V}t), \quad \phi \rightarrow 0 \text{ at } r \rightarrow \infty. \quad (11.1c)$$

Тело имеет некоторую границу  $\Gamma$ , на которой нормальная компонента скорости обращается в ноль:

$$(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{u})|_{\Gamma} = 0, \quad \text{or} \quad (\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{v})|_{\Gamma} = (\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{V}), \quad (11.1d)$$

где  $\boldsymbol{\ell}$  — нормаль к поверхности тела. Напомним себе также, что потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (2.21b).

Определим вид поправки к потенциалу, связанной с движением тела на далёких от него расстояниях. Эта поправка должна убывать с удалением от тела. Поскольку потенциал течения удовлетворяет уравнению

Лапласа, то наименее быстро убывающим вкладом является

$$\phi(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{P}_I \cdot \nabla) \frac{1}{r}. \quad (11.1e)$$

Неизвестный пока вектор  $\mathbf{P}_I$ , имеющий размерность импульса, линейно зависит от скорости движения тела  $\mathbf{V}$ ,

$$P_I^i = \rho \alpha_{ik} V^k.$$

Тензор  $\alpha_{ik}$  имеет размерность объёма, по порядку величины его матричные элементы равны объёму тела  $\mathcal{V}_a$ ,  $\alpha^{ik} \sim \mathcal{V}_a$ . Таким образом, на далёких от тела расстояниях

$$\phi \approx \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha_{ik} V^i n^k}{r^2}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}/r. \quad (11.1f)$$

Скорость на далёких расстояниях получается непосредственным дифференцированием (11.1f),  $\mathbf{v} = -\text{grad } \phi$ . При подсчёте же давления на далёких расстояниях вклад в него от квадрата скорости согласно уравнению Бернулли (2.21c) учитывать не надо, поскольку он убывает как  $1/r^6$ . Итак,

$$v^i \approx \frac{1}{4\pi\rho} \frac{3P_I^j n^j n^i - P_I^i}{r^3}, \quad (11.1g)$$

$$P = -\frac{\rho(\nabla\phi)^2}{2} + \rho\partial_t\phi \approx \frac{1}{4\pi} \frac{\partial_t P_I^j n^j}{r^2}. \quad (11.1h)$$

Отметим, что если тело движется равномерно и прямолинейно, то давление не изменяется при изменении движения на обратное, т.е. при инверсии скорости  $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$ . Это можно считать доказательством того, что на такое тело не действует сила.

**Мгновенность и линейность отклика потенциального течения.** Распределение скорости в пространстве определяется уравнениями, в которых нет временной производной. То есть, оно определяется текущим значением скорости тела и его ориентацией в пространстве. Мгновенность отклика распределения скорости жидкости в пространстве есть общее свойство потенциальных течений. Используя этот факт, мы можем обобщить результат рассмотрения равномерного и прямолинейного движения тела. Если тело движется ускоренно или изменяет свою форму, но мы по-прежнему

считаем, что поле скорости полностью потенциально, то решение на далёких расстояниях будет иметь вид

$$\phi = \phi \left( \hat{\alpha}(t) \mathbf{V}(t); \mathbf{r} - \int^t dt' \mathbf{V}(t') \right) \quad (11.1i)$$

в системе координат, где жидкость покоится на далёких расстояниях. Можно ещё отметить, что потенциал  $\phi$  (11.1i) линеен по скорости движения тела  $\mathbf{V}$ , стоящей в первом аргументе (или, что тоже самое, линеен по первому аргументу). В частности, при изменении скорости движения на противоположную,  $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$ , потенциал также меняет знак,  $\phi \rightarrow -\phi$ .

### 11-1.1 Присоединённая масса

Тело при движении увлекает за собой жидкость. Однако попытка вычислить полный импульс жидкости используя, например, выражение (11.1g), наталкивается на то, что результат интегрирования будет зависеть от формы объёма, по которому производит интегрирование. Это свидетельствует о том, что течение в жидкости, вызванное движением тела, является нелокальным в чисто потенциальном приближении и в целом зависит от формы границ течения. От формы границ зависит и полный импульс течения. Это обсуждается ниже в Пункте 11-1.2.

Однако движение тела всё же определяется локальными величинами. Для того, чтобы их выявить, найдём величину, характеризующую течение жидкости вблизи тела, определение которой бы не зависело от формы объёма интегрирования. Таковой является кинетическая энергия течения жидкости в системе отсчёта покоя жидкости. Действительно, плотность кинетической энергии  $\mathbf{v}^2/2$  убывает на больших расстояниях как  $1/r^6$ , так что при увеличении размеров объёма интегрирования  $\mathcal{V}$  результат интегрирования насыщается и перестаёт зависеть от формы и размеров объёма. Поэтому определим, что объём  $\mathcal{V}$  заключён между телом и шаром большого радиуса  $R$ :

$$\mathcal{V} + \mathcal{V}_a = (4\pi/3)R^3. \quad (11.2a)$$

Итак, кинетическая энергия увлечённой телом жидкости пропорциональна интегралу

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{v}^2 = \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{V}^2 + \int_{\mathcal{V}} d^3r (\mathbf{v}^2 - \mathbf{V}^2) = \quad (11.2b)$$

$$= \mathcal{V} \mathbf{V}^2 - \int_{\mathcal{V}} d^3r \partial_i (u^i (\phi - \phi_{\mathcal{V}})) =$$

$$= \mathcal{V} \mathbf{V}^2 - \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}} d^2S (\phi - \phi_{\mathcal{V}}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) + \quad (11.2c)$$

$$+ \int_{\Gamma} d^2S (\phi - \phi_{\mathcal{V}}) (\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{u}),$$

где мы воспользовались определениями (11.1a, 11.1c). Последний вклад в (11.2c) ввиду граничного условия (11.1d) равен нулю. При интегрировании по внешней поверхности  $\Gamma_{\mathcal{V}}$  мы должны удержать в подинтегральных множителях только асимптотические вклады,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) &= -V^i n^i + 2P_I^i n^i / 4\pi\rho R^3, \\ \phi - \phi_{\mathcal{V}} &= R \left( -V^i n^i + P_I^i n^i / 4\pi R^3 \right). \end{aligned} \quad (11.2d)$$

В результате, интеграл от квадрата скорости оказывается равным

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{v}^2 &= \mathcal{V} \mathbf{V}^2 - R^3 \int d^2o n^i V^i n^k V^k + \\ &+ 3 \int \frac{d^2o}{4\pi} \alpha_{ik} V^k n^i n^j V^j = \\ &= (\alpha_{ik} - \mathcal{V}_a \delta_{ik}) V^i V^k. \end{aligned} \quad (11.2e)$$

Мы, в том числе, воспользовались соотношением для объёмов (11.2a). В результате, кинетическая энергия

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{v}^2 = \frac{m_{ik} V^i V^k}{2}, \quad m_{ik} = (\alpha_{ik} - \delta_{ik} \mathcal{V}_a) \rho. \quad (11.2f)$$

Импульс  $P_{\text{add}}^i$  жидкости, увлекаемой телом, должен быть определён согласно канонической связи

$$V^i = \frac{\partial E}{\partial P_{\text{add}}^i}. \quad (11.2g)$$

Отсюда следует, что импульс жидкости равен

$$P_{\text{add}}^i = m_{ik} V^k. \quad (11.2h)$$

Ускоряя тело, надо придавать ускорение и увлекаемой телом жидкости: ели к телу приложена сила  $\mathbf{F}$ , то уравнением движения является

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{add}}^i + m_a \mathbf{V}) = \mathbf{F}, \quad (11.2i)$$

где  $m_a$  — масса самого тела. Величина увлекаемого объёма определяется тензором  $m_{ik}$ , поэтому он называется *тензором присоединённых масс (tensor of added mass)*.

Чисто потенциальное приближение привело нас к тому, что при равномерном движении тела и неизменных его форме и ориентации в пространстве сила сопротивления отсутствует. Разумеется, в действительности сила сопротивления не равна нулю, поскольку на самом деле течение может быть приближено потенциальным не во всём пространстве — потенциальное приближение не годится в области следа, которая располагается за телом.

### 11-1.2 Нелокальность в гидродинамике несжимаемой жидкости

Попробуем посчитать полный импульс  $\mathbf{P}_{tot}$ , связанный с движением жидкости. Проинтегрируем объёмную плотность импульса жидкости в системе координат, где жидкость на бесконечности покоится, по некоторому большому объёму  $\mathcal{V}$ , и преобразуем этот интеграл в поверхностный:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{tot} &= \rho \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{v} = -\rho \int_{\mathcal{V}} \text{grad } \phi d^3r = \\ &= \rho \int_{\Gamma} d^2S \ell \phi - \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}} \frac{(\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{n})}{4\pi r^2} d^2S. \end{aligned} \quad (11.2j)$$

Из зависимости выражения для скорости (11.1g) следует, что интеграл по объёму плохо определён, поскольку логарифмически расходится по  $r$ . Рассматривая интеграл по внешней поверхности  $\Gamma_{\mathcal{V}}$ , примем, что эта поверхность имеет форму цилиндра радиуса  $D$ , у которого образующая направлена вдоль вектора  $\mathbf{P}_T$  и имеет длину  $2L$ . Тело находится в центре цилиндра. Ненулевая часть интеграла (11.2j) набирается только на торцах цилиндра. Если цилиндр очень сплюснутый,  $L \ll D$ , то этот интеграл в (11.2j) равен  $\mathbf{P}_T$ ; если же, наоборот, цилиндр вытянутый,  $D \ll L$ , то интеграл оказывается намного меньше,  $(D^2/2L^2)\mathbf{P}_T$ .

Соответственно, оказывается плохо определённой процедура вычисления силы, действующей на тело вместе с его присоединённой массой, через поток импульса. Формально запишем эту силу:

$$F^i = - \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}} d^2S^k \Pi^{ik}. \quad (11.2k)$$

Нам надо учесть только те вклады в  $\Pi^{ik}$ , которые убывают с расстоянием наиболее медленно, как  $1/r^2$ . Вклад от скорости (11.1g) в поток импульса (2.6a) убывает с расстоянием как  $1/r^6$ , поэтому в ответ вносит вклад только давление, нужная асимптотика которого выписана ранее в (11.1h). Подставляя выделенный вклад в давление в (2.6a, 11.2k), получаем,

$$F^i = -\partial_t P_T^j \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}} \frac{d^2S^i}{4\pi} \frac{n^j}{r^2}, \quad (11.2l)$$

что, как и должно быть, является производной по времени от поверхностного интеграла в (11.2j). Также как и (11.2j), сила (11.2l) плохо определена, поскольку зависит от формы поверхности  $\Gamma_{\mathcal{V}}$ .

Проделанные вычисления говорят о нелокальности гидродинамики несжимаемой жидкости. В реальности для полного определения течения нам надо было бы поставить граничные условия на границе течения. Форма границ течения существенно влияет на распределение привотока — течения, которое компенсирует движение

присоединённой массы, так что в итоге центр масс жидкости смещается в противоположную сторону по отношению к движению тела. Вычисляя полный импульс  $\mathbf{P}_{tot}$ , мы должны были бы принимать во внимание и импульс, связанный с противотоком.

Однако, если нас интересует движение тела, то ничего о форме границ течения и противотоке знать не нужно, поскольку сила течения в противотоке обратно пропорциональна объёму жидкости.

### 11-1.3 Квази-импульс ограниченного в пространстве течения

Пусть скорость на далёких расстояниях спадает не медленнее, чем  $1/r^3$ , а завихренность — не медленнее чем  $1/r^5$ ; таким образом, наиболее медленно спадающая часть скорости является потенциальной, на далёких расстояниях можно положить  $v^i = -\partial_i \phi$ . Жидкость несжимаема, её плотность всюду однородна. Жидкость неограничена по сравнению с системой вихрей. В области, где возбуждены вихри, может быть приложена внешняя объёмная сила  $\mathbf{f}$ . Кинематическая вязкость может быть неоднородна в области существования токов. Заметим, однако, что, поскольку на далёких расстояниях ведущим оказывается потенциальный вклад в скорость, то вязкие силы там пренебрежимо малы.

Определим бездивергентную вектор-функцию тока  $\Psi$ ,  $\mathbf{v} = \text{rot } \Psi$  и  $\text{div } \Psi = 0$ . Покажем, что интегральная векторная величина

$$\mathbf{P}_T = \frac{\rho}{2} \int d^3r [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (11.3a)$$

которую мы называем квази-импульсом, удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{P}_T}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \int d^3r \mathbf{f}. \quad (11.3b)$$

Величина  $\mathbf{F}$  есть полная сила, приложенная внешними источниками к жидкости в области существования вихрей. Если предположить, что скорость  $\mathbf{v}$  убывает на больших расстояниях быстрее, чем  $1/r^3$ , то выражение (11.3a) совпадёт с (11.2j), которое, в свою очередь, окажется хорошо определённым интегралом. Однако, если в скорости есть потенциальный вклад, убывающий как  $1/r^3$ , выражение для квази-импульса (11.3a) остаётся хорошо определённым, тогда как (11.2j) перестаёт быть таковым.

Сначала поясним геометрическое значение квази-импульса  $\mathbf{P}_T$ . Можно провести аналогию с магнитостатикой:  $\Psi$  есть вектор-потенциал  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{v}$  есть магнитное поле  $\mathbf{B}$ , завихренность  $\boldsymbol{\omega}$  — электрический ток  $\mathbf{j}$ , а  $\mathbf{P}_T$  — магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$ . Отличие состоит в том, что в магнитостатике обычно предполагается, что токи строго ограничены в пространстве; здесь мы требуем только достаточно быстрого убывания завихренности  $\boldsymbol{\omega}$ . Интегральная завихренность равна нулю,

$$\int d^3r \boldsymbol{\omega} = \int d^3r \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad (11.3c)$$

поскольку граничные члены на далёких расстояниях убывают не медленнее чем  $1/r^2$  с учётом увеличения площади поверхности интегрирования; в магнитостатике это равенство соответствует отсутствию движения полного заряда.

Вектор-функция тока может быть непосредственно выражена через завихренность:

$$\Delta \Psi = -\boldsymbol{\omega}, \quad \Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (11.3d)$$

Скорость же вычисляется по формуле Бой-Савара-Лапласа

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (11.3e)$$

На далёких расстояниях

$$\Psi^i(\mathbf{r}) = \frac{n^k P_I^{ki}}{4\pi\rho r^2}, \quad P_I^{ki} = \rho \int d^3 r \varpi^i r^k. \quad (11.3f)$$

Тензор  $P_I^{ik}$  является антисимметричным вследствие того, что завихренность бездивергентна,  $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$ , и достаточно быстро убывает с расстоянием. Поэтому выражение (11.3f) эквивалентно выписанному нами выше определению (11.3a). Благодаря антисимметричности  $P_I^{ik}$ , уравнение (11.3f) можно переписать в более общепринятом виде

$$\boldsymbol{\Psi} = \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{P}_I]}{4\pi\rho r^2}. \quad (11.3g)$$

Распределение скорости, задаваемое вектор-функцией тока (11.3g), может быть описано и потенциалом (11.1e). Таким образом, квази-импульс находится в однозначном соответствии с асимптотикой потенциальной части скорости на далёких расстояниях.

Теперь непосредственной проверкой покажем, что  $\mathbf{P}_I$  является интегралом движения:

$$\begin{aligned} \frac{dP_I^i}{dt} &= \frac{\rho}{2} \int d^3 r [\mathbf{r} \times \partial_t \boldsymbol{\omega}]^i = \frac{1}{2} \int d^3 r [\mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{f}]^i + \\ &+ \frac{\epsilon^{ijk} \epsilon^{klm}}{2} \int d^3 r r^j \partial_l \partial_n (\sigma'^{nm} - \rho v^n v^m) = \\ &= \int d^3 r (f^i + \partial_n (\sigma'^{in} - \rho v^i v^n)) = F^i, \end{aligned} \quad (11.3h)$$

где полная сила  $\mathbf{F}$  определена выше в (11.3b). Положительный результат в сравнении с (11.2l) основан на том, что операция взятия ротора исключает вклад от давления, который может убывать слишком медленно, смотри (11.1h). Таким образом, равенство (11.3b) доказано.

Отметим, наконец, что определению (11.3a) для квази-импульса  $\mathbf{P}_I$  соответствует выражение для импульса  $\mathbf{P}_{\text{tot}}$  (11.2j), если интеграл считать по всей внутренности объёма  $\mathcal{V}$ , в том числе по включениям в жидкость, полагая, что массовая плотность среды всюду

одинакова (но не её вязкость), при этом форма объёма  $\mathcal{V}$  есть сильно вытянутый цилиндр,  $D \ll L$ , смотри текст после (11.2j). При этом должно предполагаться отсутствие противотока; иными словами, границы жидкости должны сильно превосходить объём  $\mathcal{V}$ .

### 11-1.4 Обтекание шара

Примем радиус шара равным  $a$ . По причине симметрии шара, кроме основной гармонике (11.1f) в потенциале не возбуждается более высоких гармоник, т.е. (11.1f) является точным. Кроме того, тензор присоединённым масс пропорционален единичной матрице,  $m_{ik} = m\delta_{ik}$  и  $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$ . Подставляя выражение для скорости (11.1g) в граничное условие (11.1d), получаем, что присоединённая масса жидкости (11.2f) равна половине массы вытесненной шаром жидкости

$$\alpha = \frac{4\pi a^3}{2} = \frac{3\mathcal{V}_a}{2}, \quad m = \rho(\alpha - \mathcal{V}_a) = \frac{\rho\mathcal{V}_a}{2}. \quad (11.4a)$$

В системе координат, где жидкость далеко от шара неподвижна, поле скорости  $\mathbf{v}$  описывается потенциалом (11.1f):

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{a^3(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{V})}{2r'^2} = -\frac{a^3}{2}(\mathbf{V}\nabla) \frac{1}{r'} = \frac{a^3}{2} \partial_t \frac{1}{r'}, \\ \mathbf{n}' &= \frac{\mathbf{r}'}{r'}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t. \end{aligned} \quad (11.4b)$$

В последнем варианте записи в (11.4b) предполагается, что  $\mathbf{V}$  не зависит от времени, тогда как предыдущие варианты записи допускают произвольную зависимость  $\mathbf{V}(t)$ .

Сравнивая ответ для шара (11.4b) и общее выражение (11.1e), заключаем, что квази-импульс

$$\mathbf{P}_I = \frac{3\mathcal{V}_a}{2} \mathbf{V}. \quad (11.4c)$$

Это можно понимать, например, так: если бы материал шарика имел ту же плотность  $\rho$  и неограниченно большую вязкость, которая бы препятствовала его деформации, то полная кинетическая энергия системы была бы равна  $(\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{V})/2$ .

### 11-1.5 Задачи

• **Задача 1:** Определить итоговое смещение лагранжевой частицы после прохождения твёрдого шара с постоянной скоростью для прицельных расстояний  $r_{\perp}$ , больших по сравнению с радиусом шара. *Указание:* Воспользуйтесь выражением (11.4b) для потенциала скорости.

• **Задача 2:** Двигающийся в жидкости шарик со скоростью  $V(t)$  медленно изменяет свой объём, так что его радиус изменяется по закону  $a(t)$ , медленность означает  $\partial_t a \ll V$ . Считая, что на шарик не действуют внешние силы, а обтекание шарика жидкостью чисто потенциально, найдите, как будет изменяться скорость шарика во времени. Массовые плотности материала шарика и жидкости равны при  $a = a_0 \equiv a(t = 0)$ .

• **Задача 3:** Найти присоединённую массу у удлинённого эллипсоида вращения при его потенциальном обтекании, когда эллипсоид движется вдоль своей глав-

ной оси. Главная полуось равна  $b$ , две другие равны  $a \ll b$ . Расчёты произвести с логарифмической точностью по параметру  $b/a$ .

## §11-2. Кольцевой вихрь

Рассмотрим задачу о всплывании кольцевого пузыря.

Радиус оси тора равен  $R$ , пузырь вытянут вдоль этой оси и имеет радиус  $a \ll R$ . На оси вихря сконцентрирована завихренность с циркуляцией  $\Gamma$ . В самой жидкости течение безвихревое, так что поле завихренности можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma \delta(z - z_0) \delta(r_\perp - R) \mathbf{e}_\varphi \quad (11.6a)$$

на масштабах, превышающих радиус сечения пузыря  $a$  ( $\{r_\perp, \varphi, z\}$  — цилиндрические координаты). Положение пузыря по вертикали задаётся координатой  $z_0$ . Найдём скорость движения кольца  $V$  вдоль его оси, восстановив её по завихренности посредством формулы (11.3e). С логарифмической точностью получим:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_{\sim a/R}^{\pi} d\varphi \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\Gamma}{4\pi R} \ln \frac{R}{a}. \quad (11.6b)$$

Энергия  $E$  кинетического движения, связанная с вихрём, с той же логарифмической точностью равна

$$E = \frac{\rho \cdot 2\pi R}{2} \int_a^R 2\pi r dr \left( \frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\rho R \Gamma^2}{2} \ln \frac{R}{a}. \quad (11.6c)$$

Квази-импульс (11.3a) равен

$$P_I = \pi \rho R^2 \Gamma. \quad (11.6d)$$

Вертикально (вдоль оси  $z$ ) направленная сила Архимеда, действующая на пузырь, равна

$$F = 2\pi^2 R a^2 g \rho. \quad (11.6e)$$

Согласно теореме Кельвина, циркуляция  $\Gamma$  остаётся неизменной во времени, смотри (2.15f). Во-вторых, мы предполагаем, что перепад давления по мере всплывания пузыря не велик, так что его объём сохраняется, в результате чего остаётся константой сила Архимеда  $F$ . Итак, неизменными величинами являются

$$\Gamma = \text{const}, \quad F = \text{const}. \quad (11.6f)$$

Однако радиус кольца  $R$  и радиус пузыря  $a$  по отдельности изменяются. Именно через вариацию  $R$  устанавливается связь кинетической энергии (11.6c), квази-импульса (11.6d) и скорости (11.6b):

$$\frac{\partial E}{\partial P_I} = \frac{\partial E}{\partial R} \Big|_F / \frac{\partial P_I}{\partial R} \Big|_F = V. \quad (11.6g)$$

Вычисления были произведены с логарифмической точностью, то есть  $\ln(R/a)$  считался постоянным; поправки порядка единицы к логарифму учтены в работе [Roberts & Donnelly, 1970]. Скорость изменения квази-импульса определяется уравнением (11.3a):

$$\frac{dP_I}{dt} = F : \quad R^2 = R_0^2 + \frac{Ft}{\pi \rho \Gamma}. \quad (11.6h)$$

• **Задача 1:** При экспериментальном наблюдении динамики кольцевых вихрей, образованных кольцевыми пузырями (смотри § 11-2), может быть удобнее измерять зависимость радиуса вихря  $R$  от его положения по вертикали. Найдите закон  $R(z)$ . Ограничьтесь логарифмической точностью по отношению  $R/a \gg 1$ , где  $a$  — радиус сечения пузыря.

## §11-3. Вихревой след

Картина потенциального обтекания тела, построенная в § 11-1, в целом не верна, поскольку не учитывает возникновение завихренности вблизи поверхности обтекаемого тела. Тем не менее, поле скорости, построенное в предположении о потенциальном его характере, является хорошим начальным приближением для почти всего пространства, за исключением области вихревого следа за телом, а также вязкого пограничного слоя на

всей его поверхности.

По-прежнему рассматриваем тело, движущееся равномерно и прямолинейно со скоростью  $\mathbf{V}$  сквозь жидкость. Условно тело имеет сферическую форму, его радиус равен  $a$ . В системе отсчёта, где тело неподвижно, поле скорости жидкости равно  $\mathbf{u}$ . Примем, что тело находится в начале декартовой системы координат  $Oxuz$  и движется вдоль оси  $Oz$ . Для определённости счита-

ем  $V \equiv V^z > 0$ . В лабораторной системе, где жидкости неподвижна на далёких расстояниях от тела, её поле скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{V}$  (11.1b), где поле скорости  $\mathbf{u}$  есть возмущение, вызванное движением тела. Число Рейнольдса, по определению равно

$$\text{Re} = \frac{Va}{\nu}, \quad (11.7a)$$

предполагается большим,  $\text{Re} \gg 1$ .

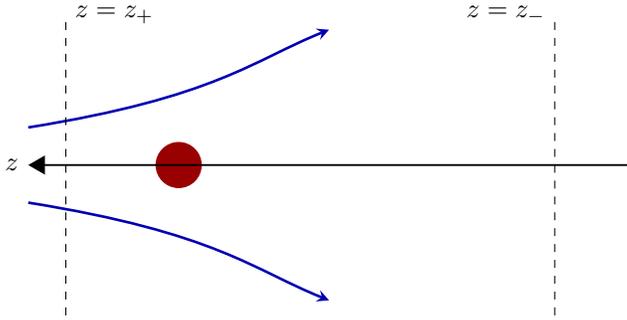


Рис. 11.1

Течение остаётся потенциальным спереди от тела и с боков от него, в этой области потенциал течения равен  $\phi$ . Общий вид потенциала на далёких расстояниях отличается от случая чисто потенциального обтекания (11.1e) тем, что в нём может быть вклад с нулевой угловой гармоникой, знак которого соответствует оттоку от тела. Полный поток от тела равен нулю, так что отток в области потенциального течения компенсируется притоком в области вихревого следа. На далёких расстояниях первыми двумя главными вкладами в потенциал, таким образом, являются

$$\phi = \frac{Q}{r} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \dots \quad (11.7b)$$

Потенциальное приближение неприменимо в области вихревого следа, в котором завихренность отлична от нуля.

Сила  $\mathbf{F}$ , действующая на тело, определяется поверхностным интегралом

$$F^i = \oint \langle \Pi^{ki} \rangle d^2 S^k = \left( \int_{z=z_+} - \int_{z=z_-} \right) dx dy \langle \Pi^{zi} \rangle, \quad (11.7c)$$

который следует вычислять в системе отсчёта, где поле скорости в среднем остаётся неизменным во времени, то есть в системе отсчёта, где дело покоится. Плоскость  $z = z_+ > 0$  находится исключительно в области потенциального течения, тогда как плоскость  $z = z_- < 0$  пересекает область вихревого следа за телом (разумеется, предполагается, что обе плоскости не пересекают самого тела). Средняя плотность импульса, запасённого в жидкости, остаётся неизменной, так что результат интегрирования (11.7c) не зависит от конкретных положений плоскостей  $z_{\pm}$ .

Проведём теперь интегрирование в (11.7c). Для этого надо посчитать разность интегральных потоков импульса (2.6a) через плоскости  $z = z_{\pm}$ . Мы вычтем из подынтегрального выражения для поверхностного интеграла в (11.7c) постоянный вклад  $\Pi_0^{ki}$ , соответствующий отсутствию тела, в результате чего под интегралом окажется отклонение плотности потока импульса от его значения в отсутствии тела  $\delta \Pi^{ki} = \Pi^{ki} - \Pi_0^{ki}$ . Распишем это отклонение через скорости и отклонение  $P$  давления от его значения вдалике от тела:

$$\begin{aligned} \delta \Pi^{ki} &= \rho(u^i u^k - V^i V^k) + P \delta^{ik} = \quad (11.7d) \\ &= \rho(P \delta^{ik} - V^k v^i) + \rho(v^i v^k - v^k v^i), \end{aligned}$$

Согласно второму выражению для поверхностного интеграла (11.7c), нам нужны  $z$ -компоненты тензора (11.7d). Первое слагаемое  $v^z v^i$  во второй скобке в (11.7d) даёт нулевой вклад в (11.7c), поскольку  $\mathbf{v}$  достаточно быстро убывает при удалении от тела. Интеграл от последнего слагаемого  $v^z V^i$  в (11.7d) по замкнутой поверхности (11.7c) равен нулю, поскольку он пропорционален полному потоку жидкости через замкнутую поверхность. Поэтому сила, действующая на тело, равна

$$F^i = \left( \int_{z=z_+} - \int_{z=z_-} \right) dx dy \langle P \delta^{zi} - \rho v^i V \rangle. \quad (11.7e)$$

### 11-3.1 Сила сопротивления

Сила сопротивления есть  $z$ -компонента вектора (11.7e), так что нам надо знать давление  $P$ . В потенциальной области течения верно уравнения Бернулли (2.21c), поэтому имеем

$$P = \rho \frac{V^2 - u^2}{2} \approx \rho V v^z \quad \text{in potential flow.} \quad (11.8a)$$

В следе давление приблизительно равно давлению в окружающем потенциальном течении, поскольку геометрически след представляет собой вытянутую область, относительно узкую в поперечном направлении. Получаем, что в области потенциального течения подынтегральное выражение в (11.7e) равно нулю в силу (11.8a). Полная сила, следовательно, определяется только интегралом в области вихревого следа. При переходе из области потенциального течения в вихревой след скорость  $v^z$  значительно изменяется, причём её абсолютное значение намного больше, чем значение скорости в потенциальной области течения на том же расстоянии от тела. Тогда как давление остаётся примерно тем же самым, т.е. и в следе оно убывает с расстоянием как  $1/r^2$ . Поэтому вкладом в поток импульса от давления в следе можно пренебречь, то есть

$$\begin{aligned} \Pi^{zz} &\approx 0 && \text{in potential flow,} \\ \langle \Pi^{zz} \rangle &\approx -\rho V \langle v^z \rangle && \text{in wake.} \end{aligned} \quad (11.8b)$$

Таким образом, сила сопротивления (11.7c)

$$F^z = -\rho V \int_{\text{wake}} dx dy \langle v^z \rangle. \quad (11.8c)$$

Поскольку сила сопротивления должна быть направлена против движения тела, т.е.  $F^z < 0$ , то внутри следа  $\langle v^z \rangle > 0$ , то есть жидкость двигается к телу. Это движение есть результат увлечения жидкости телом. Для компенсации этого движения в потенциальной области течения должно происходить движение жидкости от тела, т.е.

$$Q \approx -\frac{F^z}{4\pi\rho V} = \frac{C}{4\pi} V a^2 \quad (11.8d)$$

в выражении (11.7b) для потенциала течения. При больших числах Рейнольдса величина  $C$  является почти константой, так что и эта часть потенциального течения оказывается линейной по скорости движения.

То, что при больших числах Рейнольдса коэффициент  $C$  должен быть почти константой, следует в том числе и из соображений размерности. Сила сопротивления не должна зависеть от вязкости, поэтому должна иметь вид

$$F^z = -C\rho V^2 a^2. \quad (11.8e)$$

Зависимость от квадрата скорости в (11.8e), в частности, означает необратимость процесса обтекания в отличие от процесса вязкого обтекания тела. Экспериментально полученную зависимость силы сопротивления от скорости движения сферы можно найти в [Liu & Yu, 2022].

### 11-3.2 Турбулентный след

Пусть средняя по времени ширина турбулентного следа в  $x$ - и  $y$ -направлениях есть  $X$  и  $Y$  соответственно.

Будем сейчас считать, что тело приблизительно аксиально симметрично, его размер равен  $a$ . Тогда поперечные размеры следа в обоих направлениях равны,  $X = Y$ . Результат интегрирования в (11.8b) не зависит от положения плоскости интегрирования  $z_-$ . Благодаря этому (11.8b) даёт возможность сделать оценку на

амплитуду среднего течения в следе с его шириной,

$$v \sim \frac{F^z}{\rho V} \frac{1}{Y^2}. \quad (11.8f)$$

Величина  $v$  есть оценка и для амплитуды турбулентных пульсаций в следе. Таким образом, величина  $v$  определяет скорость уширения области следа при удалении от тела:

$$-V\partial_z Y \sim v \quad \text{or} \quad -Y^2\partial_z Y \sim \frac{F^z}{\rho V^2}. \quad (11.8g)$$

Решением этого уравнения являются соотношения

$$Y \sim C^{1/3} a^{2/3} |z|^{1/3}, \quad v \sim V |a/z|^{2/3}. \quad (11.8h)$$

#### 11-3.2.1 Подъёмная сила

Выясним происхождение подъёмной силы, т.е.  $F^{x,y}$ -компонент силы.

$$F^\alpha = -\rho V \left( \int_{z_+} - \int_{z_-} \right) dx dy \langle v^\alpha \rangle. \quad (11.8i)$$

Для чисто потенциального течения этот интеграл есть интеграл от полной производной и потому обращается в ноль.

Для вытянутого крыла, которое может быть принято однородным в  $y$ -направлении, погонная плотность подъёмной силы  $F^x/a_y$  равна

$$\frac{F^x}{a_y} = -\rho V \left( \int_{z_+} - \int_{z_-} \right) dx \langle v^x \rangle = -\rho V \oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}) \quad (11.8j)$$

### 11-3.3 Задачи

- **Задача 1:** Оцените установившуюся скорость падения шара радиуса 1 м, сделанного из базальтовой ваты. Массовая плотность базальтовой ваты равна  $100 \text{ кг/м}^3$ , плотность воздуха равна  $1.2 \text{ кг/м}^3$ , динамическая вязкость воздуха равна  $2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .



## Часть II

## ПРИЛОЖЕНИЯ

## Глава 12

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ  
СТАТИСТИКИ

## §12-1. Одномерная случайная величина

Рассмотрим одномерную случайную величину  $\xi$ , функция распределения плотности вероятности которой равна

$$\mathcal{P}(\xi).$$

Для простоты мы будем предполагать, что функция  $\mathcal{P}(\xi)$  определена на всей числовой оси. Мы полагаем, что  $\mathcal{P}(\xi)$  нормирована на единицу,

$$\int \mathcal{P}(\xi) d\xi = 1.$$

## 12-1.0.1 Среднее от величины

Пусть нам дана некоторая величина  $f(\xi)$ , зависящая от случайной величины  $\xi$ . Средним  $\langle f \rangle$  от этой величины мы называем интеграл

$$\langle f \rangle = \int \mathcal{P}(\xi) f(\xi) d\xi.$$

## 12-1.1 Характеристическая функция

Характеристической функцией  $\mathcal{Q}(u)$  называют среднее

$$\mathcal{Q}(u) = \langle \exp\{iu\xi\} \rangle = \int d\xi \mathcal{P}(\xi) \exp\{iu\xi\} \quad (12.1)$$

Таким образом, характеристическая функция есть Фурье-образ функции распределения плотности вероятности.

Знание функции  $\mathcal{Q}(u)$  позволяет вычислять средние значения от степеней случайной величины  $\xi$ :

$$\langle \xi^n \rangle = (-i)^n \mathcal{Q}^{(n)}(u) \Big|_{u=0}, \quad (12.2)$$

где верхний индекс  $(n)$  означает  $n$ -кратное дифференцирование.

## 12-1.1.1 Неприводимые средние

Вместо функции  $\mathcal{Q}(u)$  нам будет удобнее пользоваться функцией  $q(iu)$ , которую мы определяем через равенство

$$\mathcal{Q}(u) = \exp\{q(iu)\}. \quad (12.1a)$$

Отметим, что в силу нормировки полной вероятности на единицу  $q(0) = 0$ .

Неприводимое среднее  $\langle\langle \xi^n \rangle\rangle$  от случайной величины  $\xi$  с целой степени  $n$  показывает, какой вклад в простое среднее  $\langle \xi^n \rangle$  вносит именно наличие степени  $n$  в усредняемом выражении  $\xi^n$ . Например,

$$\langle\langle \xi^4 \rangle\rangle = \langle \xi^4 \rangle - \left( 3\langle \xi^2 \rangle^2 + 3\langle \xi^3 \rangle \langle \xi \rangle + \langle \xi \rangle^4 + 6\langle \xi^2 \rangle \langle \xi \rangle^2 \right).$$

Коэффициенты в этом выражении определяются комбинаторными соображениями.

Общее определение неприводимого среднего можно выписать, используя введённый аппарат характеристических функций:

$$\langle\langle \xi^n \rangle\rangle = q^{(n)}(v) \Big|_{v=0}, \quad (12.3)$$

где верхний индекс  $(n)$  означает  $n$ -кратное дифференцирование.

Неприводимое среднее  $\langle\langle \xi^n \rangle\rangle$  называется ...

## §12-2. Сумма независимых одинаково распределённых случайных величин

Рассмотрим случайную величину  $\Xi$ , являющуюся суммой  $N$  независимых одинаково распределённых случайных величин  $\xi_i$ ,

$$\Xi = \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad i = \overline{1, \dots, N}. \quad (12.4)$$

Мы предполагаем, что статистические свойства величин  $\xi_i$  по отдельности нам известны: функция распределения каждой из них равна

$$\mathcal{P}(\xi_i).$$

Требуется найти функцию распределения

$$\mathcal{P}_N(\Xi).$$

случайной величины  $\Xi$ .

### 12-2.0.1 Среднее и квадратичная флуктуация

Легко выписать среднее  $\bar{\Xi}$  и квадратичную флуктуацию  $\langle\langle \Xi^2 \rangle\rangle$ , пользуясь статистической независимостью случайных величин  $\xi_i$ :

$$\bar{\Xi} = N\bar{\xi}, \quad \langle\langle \Xi^2 \rangle\rangle = N\langle\langle \xi^2 \rangle\rangle.$$

### 12-2.1 Характеристическая функция

Получить функцию распределения плотности вероятности  $\mathcal{P}_N$  из функции распределения  $\mathcal{P}$  легче всего, используя построение характеристических функций:

$$\mathcal{Q}_N(u) = \langle \exp\{iu\Xi\} \rangle = \int d\Xi \mathcal{P}_N(\Xi) e^{iu\Xi}.$$

С другой стороны, используя статистическую независимость случайных величин  $\xi_i$ , получаем

$$\mathcal{Q}_N(u) = \langle \exp\{iu\xi_1\} \rangle^N = [\mathcal{Q}(u)]^N.$$

где по определению

$$\mathcal{Q}(u) \equiv \exp\{q(iu)\} = \int d\xi \mathcal{P}(\xi) e^{iu\xi}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем окончательный результат

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(\Xi) &= \int \frac{du}{2\pi} e^{-iu\Xi} [\mathcal{Q}(u)]^N = \\ &= \int \frac{du}{2\pi} \exp\{-iu\Xi + Nq(iu)\}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

### 12-2.2 Описание флуктуаций для суммы многих случайных величин

Рассмотрим предел, когда число  $N$  суммируемых независимых случайных величин велико,

$$N \gg 1.$$

При достаточно больших значениях  $N$  оказывается возможным произвести интегрирование в (12.5) методом интервала. Для произведения интегрирования методом перевала вынесем множитель  $N$  в подэкспоненциальном выражении (12.5):

$$\mathcal{P}_N(\Xi) = \int \frac{du}{2\pi} \exp\left\{-N\left[iu\frac{\Xi}{N} - q(iu)\right]\right\} \quad (12.6)$$

#### 12-2.2.1 Область наиболее вероятных флуктуаций

Сначала исследуем флуктуации, при которых отклонение  $\Xi$  от своего среднего остаётся в рамках нескольких стандартных отклонений,

$$\frac{\Xi}{N} - \bar{\xi} \lesssim \frac{\sqrt{\langle\langle \xi^2 \rangle\rangle}}{\sqrt{N}} \quad (12.7)$$

Рассмотрим выражение, стоящее в квадратной скобке в (12.6) под экспонентой. Максимум этого выражения по  $u$  (он же стационарная точка) определяется уравнением

$$q'(iu_*) = \frac{\Xi}{N} \quad (12.8)$$

где  $q'(v)$  – производная  $q(v)$ .

Если  $N$  достаточно велико, то при исследовании типичных флуктуаций мы можем пренебречь всеми высшими производными в функции  $q(v)$ , положив приближённо  $q(v) \approx \bar{\xi}v + \langle\langle \xi^2 \rangle\rangle v^2/2$ . Действительно, отклонение случайной величины  $\Xi/N$  в предположении (12.7) стремится к нулю с ростом  $N$ . С учётом выражений (12.3) приходим к выводу, что положение точки перевала (12.8) идаётся оценкой

$$u_* \lesssim \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{\langle\langle \xi^2 \rangle\rangle}}$$

Размер области интегрирования по  $u$ , в которой набирается интеграл (12.6), также определяется второй производной  $q''$ . Исходя из этого, получаем такую же оценку для размера области интегрирования  $\delta u$ , как и для положения  $u_*$  точки перевала. Таким образом, с ростом  $N$  становится действительно возможным пренебречь высшими производными в функции  $q(u)$ .

В результате получаем, что выражение для функции распределения плотности вероятности

$$\mathcal{P}_N(\Xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N \langle \xi^2 \rangle}} \exp \left\{ -N \frac{(\Xi/N - \bar{\xi})^2}{2 \langle \xi^2 \rangle} \right\}. \quad (12.9)$$

Возможность пренебрежения высшими производными в  $\tilde{S}$  по  $u$  в процессе интегрирования предполагает условие

$$N \gg \frac{\langle \xi^3 \rangle^2}{\langle \xi^2 \rangle^3}, \frac{\langle \xi^4 \rangle}{\langle \xi^2 \rangle^2}. \quad (12.10)$$

### 12-2.2.2 Редкие флуктуации

В Пункте 12-2.2.1 мы ограничились рассмотрением самых типичных флуктуаций, которые определяются неравенством (12.7), что привело нас к распределению Гаусса (12.9).

Применимость интегрирования методом перевала в (12.6) при возрастании  $N$  не ограничивается областью (12.7). Однако выйдя за эту область, мы уже получим в общем случае не гауссову статистику (12.9), а зависимость вида

$$\mathcal{P}_N(\Xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N |q''(iu_*)|}} \exp \left\{ -N S \left( \frac{\Xi}{N} - \bar{\xi} \right) \right\}, \quad (12.11)$$

где функция

$$S(\xi - \bar{\xi}) = iu_* \xi - q(iu_*), \quad (12.12)$$

и перевальное значение  $u_*(\xi)$  определяется уравнением (12.8). В работе Mandelbrot [1991] было предложено называть функцию  $S$  функцией Крамера (Cramér), в других источниках функцию  $S$  называют энтропийной функцией. Функция Крамера  $S(x)$  имеет минимум при  $x = 0$ : действительно,  $\partial_\xi S(\xi - \bar{\xi}) = iu_* = 0$ , поскольку при  $\xi = \bar{\xi}$  (12.8) с учётом (12.3) даёт  $q'(0) = q'(iu_*)$ . Функция  $S(x)$  слабо отклоняется от квадратичной зависимости, полученной в (12.9),

$$S(\xi - \bar{\xi}) = \frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{2 \langle \xi^2 \rangle}$$

пока

$$\left| \frac{\Xi}{N} - \bar{\xi} \right| \ll \frac{\langle \xi^2 \rangle^2}{\langle \xi^3 \rangle}, \frac{\langle \xi^2 \rangle^{3/2}}{\langle \xi^4 \rangle^{1/2}}.$$

Здесь второй вариант ограничения написан на тот случай, если по каким-либо причинам неприводимое среднее  $\langle \xi^3 \rangle$  исключительно мало.

Возможность интегрирования методом перевала определяется условием

$$N \gg \frac{|q^{(3)}(iu_*)|^2}{|q''(iu_*)|^3}, \frac{|q^{(4)}(iu_*)|}{|q''(iu_*)|^2}. \quad (12.13)$$

которое является обобщением условия (12.10) на случай, когда положение стационарной точки  $u_*$  сильно отклоняется от нуля. Таким образом, при росте  $N$  область применимости формулы (12.11) расширяется в единицах переменной  $\Xi/N$ , поскольку положение стационарной точки зависит только от  $\Xi/N$ .

### 12-2.3 Оптимальные флуктуации

Пусть полное количество  $N$  складываемых случайных величин в сумме (12.4) складывается из двух подсумм, так что

$$N = N_1 + N_2. \quad (12.14a)$$

Мы предполагаем оба слагаемых в правой части по-прежнему большими,  $N_{1,2} \gg 1$ . Пусть для определённости  $N_2 > N_1$ .

Величины  $\xi_i$  в сумме (12.4) можно рассматривать как случайный процесс, роль времени в котором играет индекс  $i$ . Тогда  $N$  есть полное время, большое по сравнению с  $1$  – временем корреляции случайного процесса, а (12.14a) есть разбиение полного времени на некоторых два промежутка, по-прежнему содержащих в себе большое количество времён корреляции случайного процесса  $\xi_i$ . Мы рассматриваем случайные процессы, приводящие к результату  $\Xi$ , что формально задано уравнением (12.4).

Распределение случайных величин  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  также описывается функцией Крамера,

$$\mathcal{P}_{N_{1,2}}(\Xi_{1,2}) \sim \exp \left[ -N S \left( \frac{\Xi_{1,2}}{N_{1,2}} - \bar{\xi} \right) \right] \quad (12.14b)$$

Используя эти функции распределения, можно записать функцию распределения для полной суммы

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(\Xi) &= \int d\Xi_1 \mathcal{P}_{N_1}(\Xi_1) \mathcal{P}_{N_2}(\Xi - \Xi_1) \sim \quad (12.14c) \\ &\sim \int d\Xi \exp \left\{ -N \left[ \frac{N_1}{N} S \left( \frac{\Xi_1}{N_1} - \bar{\xi} \right) + \frac{N_2}{N} S \left( \frac{\Xi - \Xi_1}{N_2} - \bar{\xi} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Взятие этого интеграла методом перевала приводит к условию на стационарную точку

$$\frac{\Xi_1^*}{N_1} = \frac{\Xi_2^*}{N_2} = \frac{\Xi}{N}. \quad (12.14d)$$

при этом получается ответ, совпадающий с уже непосредственно полученной функцией распределения для  $\Xi$ . Мы использовали то, что функция  $S$  является выпуклой. При этом ширина области интегрирования по  $\Xi_1$ , в которой насыщается, может быть оценена как

$$\delta\Xi_1 \sim \left[ \left( \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right) S'' \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (12.14e)$$

где  $S''$  – вторая производная функции Крамера в точке перевала. Итак, мы видим, что относительные флуктуации величины  $\Xi_1$  подавлены как  $1/\sqrt{N_1}$ .

Обобщим полученный результат. Если мы разобьём всё ‘время’  $N$  на некоторые промежутки времени  $N_k$ , то в каждом промежутке среднее значение величины  $\Xi_k/N_k$  будет близко к среднему значению  $\Xi/N$ , а мера отклонения будет определяться фактором  $1/\sqrt{N_k}$ . По этой причине имеет смысл говорить об *оптимальной флуктуации*, приводящей к итоговому результату  $\Xi$ : случайный процесс  $\xi_i$  слабо флуктуирует вблизи зна-

чения  $\Xi/N$ . Эта ‘слабость’ не означает, что вероятность отдельно выбранной величине  $\xi_i$  отклониться от этого среднего на величину, порядка дисперсии  $\langle \xi^2 \rangle$  её самой, мала. Но вероятность подобного явления в массовом порядке, когда так сильно флуктуируют сразу много величин из всего набора  $\{\xi_i\}$ , уже существенно меньше единицы.

### §12-3. Моменты совместно распределённых гауссовых случайных величин

Теория совместно распределённых гауссовых величин хорошо изложена в [Лебедев, 2004](#), Приложение А.1. Здесь обратим внимание на опечатки: в (А.10) в последней экспоненте надо добавить множитель  $1/2$ , такой

же множитель надо добавить в формуле, следующей за (А.12).

Полезной литературой является также [Ландау и Лифшиц, 1995](#)[§111].

### §12-4. Флуктуации случайной величины: автокорреляционная функция

Пусть  $x$  – измеряемая величина некоторой физической системы,  $\hat{x}$  – квантовомеханический оператор, соответствующий этой величине. Эта система имеет большое число степеней свободы и/или взаимодействует с резервуаром, поэтому поведение во времени величины  $x(t)$  носит случайный характер: есть вреднее по времени значение  $\langle x \rangle_t$ , которое для упрощения записи дальнейших формул мы считаем нулевым,  $\langle x \rangle_t = 0$ , и на фоне этого среднего величина  $x(t)$  претерпевает случайные флуктуации.

Хотя флуктуации  $x(t)$  носят случайный характер, их статистика однородна по времени, если состояние исследуемой системы во времени статистически не меняется; в таком случае  $x(t)$  называется *стационарной случайной функцией*. В дальнейшем наших рассуждениях мы будем предполагать такую статистическую однородность по времени. В таком случае характер флуктуаций  $x(t)$  можно описать с помощью корреляционных функций. Простейшей корреляционной функцией является парная корреляционная функция

$$F(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle, \quad (12.15a)$$

называемая также *автокорреляционной функцией*. В (12.15a) угловые скобки обозначают усреднение. Это усреднение можно понимать как усреднение по времени  $t$ , так и усреднение по статистическому ансамблю рассматриваемых систем. В последнем случае левая часть не зависит от общего сдвига по времени  $t$  именно в силу статистической однородности по времени.

Удобно иметь дело с Фурье-компонентами величин. Экспериментально измеренный случайный процесс

представим в виде

$$x(t) = \int (d\omega) x_\omega e^{-i\omega t}, \quad (12.15b)$$

Здесь молчаливо предполагается, что процесс  $x(t)$  измерен на очень долгом промежутке времени, в пределе бесконечном. Предельный переход при увеличении длительности конечного времени наблюдения обсуждается ниже в Пункте 12-4.1.1. Для корреляционной функции трудностей с Фурье-преобразованием не возникает, поскольку обычно корреляционная функция стремится по абсолютной величине к нулю на больших временах:

$$F(\tau) = \int (d\omega) F_\omega e^{-i\omega\tau}, \quad F_\omega = \int d\tau F(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (12.15c)$$

Предположим сейчас, что рассматриваемая величина  $x$  классическая, т.е.  $x(t)x(t') = x(t')x(t)$ . Из этого предположения, а также из статистической однородности по времени следует чётность автокорреляционной функции,  $F(-\tau) = F(\tau)$ . Действительно,

$$F(\tau) = \langle x(0)x(\tau) \rangle = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle = \langle x(0)x(-\tau) \rangle = F(-\tau). \quad (12.15d)$$

В процессе выкладок мы выбрали  $t = -\tau$ .

#### 12-4.1 Теорема Винера-Хинчина

Связь между  $F_\omega$  статистикой  $x_\omega$  можно получить, исходя из определения  $F(\tau)$ :

$$F_\omega = \int (d\omega')(d\omega'') \langle x_\omega x_{\omega'} \rangle \exp(-it(\omega + \omega')), \quad (12.16)$$

где  $\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle$  — среднее значение, которое в данном случае проще всего понимать в смысле усреднения по статистическому ансамблю. Для того, чтобы корреляционная функция зависела только от разности времен  $\tau$ , надо, чтобы зависимость от абсолютного значения времени  $t$  отсутствовала. Это достигается, если среднее от Фурье-компонент случайного процесса не равно нулю только при совпадении абсолютного значения частот:

$$\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') (x^2)_\omega, \quad (x^2)_\omega = F_\omega. \quad (12.17)$$

Второе соотношение в (12.17), утверждающее, что спектр сигнала  $(x^2)_\omega$  равен Фурье-образу автокорреляционной функции  $F_\omega$ , называется теоремой Винера-Хинчина (также известная как теорема Хинчина-Колмогорова), см. Рытов [1976, §41] и оригинальные работы Хинчин [1938].

#### 12-4.1.1 Получение корреляционных функций путём усреднения по времени

Предположим, что случайный процесс  $x(t)$  измерялся в течении некоторого (относительно продолжительного) промежутка времени  $T$ . Выпишем здесь математические соотношения, позволяющие оперировать с Фурье-компонентами случайного процесса  $x(t)$  и автокорреляционной функции  $F(\tau)$ . Мы будем считать, что измерение проводилось во временном интервале  $[-T/2, T/2]$ , а процесс  $x(t)$  является периодичным с периодом  $T$ . Поскольку в окончательных ответах будет предполагаться предельный переход  $T \rightarrow \infty$ , то принятая периодичность не должна влиять на эти окончательные ответы.

Фурье-разложение процесса  $x(t)$  имеет вид

$$\chi_{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \exp(i\omega_n t) x(t), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad (12.18)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-i\omega_n t) \chi_{\omega_n},$$

где  $n$  — целое число,  $n \in \mathbb{Z}$ . Множитель  $1/\sqrt{T}$  в правой части оставляет Фурье-компоненту  $x_{\omega_n}$  конечной при  $T \rightarrow \infty$ . В непрерывном пределе обратное преобразование Фурье выглядело бы как

$$x(t) = \sqrt{T} \int (d\omega) e^{-i\omega t} \chi_\omega, \quad \chi_\omega = \frac{1}{\sqrt{T}} x_\omega.$$

сравни с (12.15b). Таким образом, Фурье-образы  $\chi_\omega$  и  $x_\omega$  не равны друг другу, а связаны между собой коэффициентом пропорциональности, зависящим от времени наблюдения; отметим, что удобство использования  $\chi_\omega$  состоит в его конечности при увеличении времени наблюдения, при  $T \rightarrow \infty$ .

Корреляционная функция

$$F(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt. \quad (12.19)$$

Поскольку при  $\tau \rightarrow \infty$  автокорреляционная функция стремится к нулю, то при её Фурье-преобразовании частоту  $\omega$  можно по-прежнему считать непрерывной величиной, оставляя поэтому определение преобразования Фурье для  $F(\tau)$  в виде (12.15c). Тем не менее, для проведения вычислений, сейчас мы будем считать  $\omega$  дискретной. Итак,

$$F_\omega = \sum_{n, k \in \mathbb{Z}} \chi_{\omega_n} \chi_{\omega_k} \frac{\sin[(\omega - \omega_n)T/2]}{(\omega - \omega_n)T/2} \frac{\sin[(\omega_k + \omega_n)T/2]}{(\omega_k + \omega_n)T/2},$$

причём выражение типа  $\sin(\omega'T)/(\omega'T)$  при  $\omega' = 0$  надо считать равным 1. При  $T \rightarrow \infty$  из суммы выпадают все слагаемые, кроме одного, которое определяется условием  $\omega_n = \omega$ ,  $\omega_k = -\omega$ . Поэтому

$$F_\omega = |\chi_\omega|^2.$$

В этой формуле частоту  $\omega$  можно уже считать непрерывным параметром: хотя величина  $|\chi_{\omega_n}|^2$  как функция  $n$  флуктуирует (вообще говоря, сильно) около своего среднего значения, но если произвести усреднение этой величины по промежутку  $\delta n \gg 1$ , то при  $T \rightarrow \infty$  таким образом полученное среднее  $\langle |\chi_\omega|^2 \rangle$  следует считать медленно меняющейся (на масштабах  $\gtrsim \delta n$  и много меньших характерного изменения частот, на которой меняется корреляционная функция  $F_\omega$ ) функцией  $\omega$ . Таким образом, окончательно получаем, что

$$F_\omega = (x^2)_\omega = \langle |\chi_\omega|^2 \rangle = \frac{1}{T} \langle |x_\omega|^2 \rangle. \quad (12.20)$$

Усреднение в этой формуле (реально происходящее по  $n$ ) можно понимать и как усреднение по статистическому ансамблю: по сути, усреднив по  $\delta n$ , мы провели усреднение по  $\delta n$  почти независимых промежутков времени длительностью  $T/\delta n$ .

Если мы опустим в (12.19) усреднение по времени  $t$  (при этом назовём такую функцию  $F(\tau, t)$ ), то получим, что

$$F_\omega(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_{\omega_n} \chi_\omega \exp(-i(\omega_n + \omega)t).$$

Сравнивая это выражение с выражениями (12.16, 12.17) ещё раз приходим к естественному выводу: усреднение по времени в этом выражении соответствует усреднению по статистическому ансамблю в выражении (12.17).

#### 12-4.2 Корреляционная функция в формализме квантовой механики

Фурье-компонента от оператора случайной величины и его матричного элемента в представлении Гейзенберга в

базисе собственных функций Гамильтониана  $|n\rangle$  даётся выражениями:

$$\hat{x}_\omega = \int dt \hat{x}(t) \exp(i\omega t), \quad (12.21a)$$

$$(x_\omega)_{nm} \equiv \langle n | \hat{x}_\omega | m \rangle = 2\pi \delta(\omega_{nm} - \omega) x_{nm}.$$

Обобщая выражение (12.15a) для корреляционной функции на квантовый формализм, сохраним её симметричность по времени (12.15d):

$$F(\tau) = \frac{1}{2} \langle \hat{x}(t) \hat{x}(t+\tau) + \hat{x}(t+\tau) \hat{x}(t) \rangle. \quad (12.21b)$$

Усреднение в (12.21b) проводится по матрице плотности системы  $\hat{\rho}$ , которая предполагается статистически постоянной во времени. В соответствии с (12.21b), произведение  $x_\omega x_{\omega'}$  в (12.16) заменяется на симметризованный квадрат обобщённой координаты: например, его диагональный матричный элемент равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\hat{x}_\omega \hat{x}_{\omega'} + \hat{x}_{\omega'} \hat{x}_\omega)_{nn} &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \left( (x_\omega)_{nm} (x_{\omega'})_{mn} + (x_{\omega'})_{nm} (x_\omega)_{mn} \right) = \\ &= 2\pi^2 \sum_m |x_{nm}|^2 \left( \delta(\omega_{nm} - \omega) + \delta(\omega_{nm} + \omega) \right) \delta(\omega + \omega') \end{aligned} \quad (12.21c)$$

Проводя выкладки, мы использовали определение (12.21a). Поэтому Фурье-образ корреляционной функции  $F_\omega = (x^2)_\omega$  (12.17) в случае, если система находится в состоянии  $|n\rangle$ , равен

$$\hat{\rho} = |n\rangle \langle n|, \quad (12.21d)$$

$$(x^2)_\omega = \pi \sum_m |x_{nm}|^2 \left( \delta(\omega_{nm} - \omega) + \delta(\omega_{nm} + \omega) \right).$$

Если статистика системы описывается распределением Гиббса  $\rho_n = \exp[(F - E_n)/T]$ , то выражение (12.21d) надо усреднить по этому распределению, в результате чего получим

$$(x^2)_\omega = \pi \left( 1 + \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right) \sum_{n,m} \rho_n |x_{nm}|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega). \quad (12.21e)$$

Глава 13

# НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

## §13-1. Нелинейное уравнение Шредингера

Предположим, что некоторая плоская волна распространяется в изотропной среде с дисперсией. Вдоль направления распространения направим ось  $Oz$  декартовой системы координат, так что поле волны описывается функцией  $\phi(t, z)$ . Волновое уравнение, учитывающее временную дисперсию среды, имеет вид

$$\partial_z^2 \phi = \int_0^\infty dt' \varepsilon(t') \phi(t-t') + f(t, z) \quad (13.1)$$

Сила  $f$  играет роль внешнего источника, возбуждающего волну; свободное электромагнитное поле соответствует  $f = 0$ . В частности, в силу  $f$  можно включить нелинейные по полю волны вклады в волновое уравнение. В Фурье-представлении уравнение (13.1) переписывается в виде

$$(k^2 - \beta^2(\omega)) \phi_{\omega, k} = -f_{\omega, k}, \quad (13.2)$$

где волновой вектор определяется дисперсионным соотношением. Для определённости мы предполагаем, что волна распространяется вправо, так что следует выбирать решение  $\text{Re } \beta > 0$ .

В этом параграфе мы будем рассматривать импульсы с малой относительной спектральной шириной. Это означает, что нам не нужно знать всю зависимость  $\beta(\omega)$  волнового вектора от частоты, а необходимо знать только несколько первых производных на несущей частоте  $\omega = \omega_0$ . Приняты следующие обозначения для этих производных:

$$\beta_m = \left. \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (13.3a)$$

**Фазовая скорость.** Фазовая скорость  $v_{\text{ph}}$  показывает, с какой скоростью движется гребень монохроматической волны:

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad k_0 = \beta(\omega_0). \quad (13.3b)$$

Мы предполагаем, что среда (почти) прозрачная, так что потерями пока пренебрегаем.

**Групповая скорость.** Если мы удержим в дисперсии  $\beta(\omega)$  только первую производную по частоте, то  $\beta(\omega)$  представляется в виде

$$\beta(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}, \quad (13.3c)$$

где групповая скорость

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \equiv \frac{1}{\beta_1}. \quad (13.3d)$$

В силу волнового уравнения неопределённости в волновом векторе  $\Delta k$  и  $\Delta \omega$  связаны между собой через групповую скорость, так что верна оценка

$$\Delta \omega \sim v_g \Delta k.$$

Групповая скорость, как будет показано ниже, определяет скорость движения волнового пакета.

**Вторая дисперсия.** Параметр  $\beta_2$  [с<sup>2</sup>/см] называется *дисперсией групповой скорости*, в англоязычной литературе – *group delay dispersion*. Если на интересующей частоте он положителен,  $\beta_2 > 0$ , то говорят о нормальной дисперсии (*normal dispersion*). Если  $\beta_2 < 0$ , говорят об аномальной дисперсии (*anomalous dispersion*).

Часто вместо коэффициента  $\beta_2$  пользуются другим коэффициентом  $D$  [с/см<sup>2</sup>],

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2, \quad (13.3e)$$

называемым коэффициентом хроматической дисперсией (*group delay parameter*). Как будет показано ниже, дисперсия групповой скорости определяет скорость расплывания волнового пакета.

### 13-1.1 Выделение огибающей

Волновым пакетом называется такая волна, распределение поля в которой слабо отличается от распределения поля в монохроматической волне с некоторой частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $k_0$ , которые связаны между собой законом дисперсии в среде,

$$\omega_0 = \omega_0(k_0)$$

Для волнового пакета  $\omega_0$  называется *несущей частотой*, а  $k_0$  — *несущим волновым вектором*. Таким образом, динамика поля в волновом пакете в первом приближении такая же, как и динамика поля в монохроматической волне. Тем не менее, обычно представляет интерес слабое отличие от этой динамики, которое возникает из-за слабого отличия волнового пакета от плоской волны (его слабой немонахроматичности). При этом часто оказывается удобным рассматривать волновой пакет как единое целое, не раскладывая его заранее по плоским волнам.

Для простоты изложения мы рассматриваем распространение плоского волнового пакета с фиксированной линейной поляризацией.

Рассмотрим волновой пакет и введём понятие огибающей. Любое поле, скажем, электрическое, можно представить в частотно-пространственном представлении,

$$\phi(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \phi_\omega(z) e^{-i\omega t}, \quad (13.4)$$

где в силу вещественности поля  $\phi(t)$  выполняется  $\phi_{-\omega} = \phi_\omega^*$ . Почти монохроматичность означает, что характерное время изменения *временной огибающей*  $\tilde{\phi}(t)$

$$\tilde{\phi}(t) = \int_0^{+\infty} (d\omega) \phi_\omega e^{-i(\omega - \omega_0)t}, \quad (13.5)$$

$$\phi(t) = \tilde{\phi}(t) e^{-i\omega_0 t} + \tilde{\phi}^*(t) e^{i\omega_0 t} = 2 \operatorname{Re} (\tilde{\phi}(t) e^{-i\omega_0 t})$$

$$\phi_\omega(z) = \tilde{\phi}_{\omega - \omega_0}(z) + \tilde{\phi}_{\omega + \omega_0}^*(z)$$

является большим по сравнению с периодом колебания поля  $2\pi/\omega_0$ . Как следует из определения, огибающая имеет только положительные Фурье-гармоники, в том смысле, что  $\tilde{\phi}_{\omega < \omega_0} = 0$  (Фурье-образ огибающей определяется аналогично (13.4)). Время изменения огибающей  $\tilde{\phi}(t)$  оценивается как  $1/\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  — характерная частота, на которой убывает  $\tilde{\phi}_{\Delta\omega}$ ; она называется *спектральной шириной пакета*. Почти монохроматичность волнового пакета означает, что

$$\Delta\omega \ll \omega_0.$$

Если все волны в пакете распространяются почти в одну сторону, то можно ввести вместо временной *пространственно-временной огибающей*. Электрическое поле в частотно-волновом представлении определяется согласно равенству

$$\phi(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} (d^3k) \int_{-\infty}^{\infty} (d\omega) \phi_{\omega, k} \exp\{-i\omega t + ikz\}, \quad (13.6)$$

где например,  $(dk) \equiv dk/2\pi$ . По аналогии с (13.5) пред-

ставим Фурье-компоненту электрического поля в виде

$$\begin{aligned} \phi_{\omega, k} &= \Phi_{k-k_0, \omega-\omega_0} + \Phi_{k+k_0, \omega+\omega_0}^*, \\ \phi(t, z) &= 2 \operatorname{Re} (e^{-i\omega_0 t + ik_0 z} \Phi(t, z)), \end{aligned} \quad (13.7)$$

где Фурье-образ огибающей  $\Phi_{\omega, k}$  имеет один максимум при нулевых значениях волнового вектора и частоты, и убывает на  $k \sim \Delta k$ ,  $\omega \sim \Delta\omega$ . В силу нашего предположения о том, что все волны в волновом пакете распространяются почти в одну сторону, ширина по волновому вектору также должна быть малой, так что

$$\Delta k \ll k_0.$$

### 13-1.2 Уравнение на огибающую

Запишем волновое уравнение (13.2) в терминах огибающей  $\Phi$ :

$$\left( (k_0 - i\partial_z)^2 - (\beta(\omega_0 + i\partial_t))^2 \right) \Phi(t, z) = -f_+, \quad (13.8a)$$

где мы у силы  $f$  выделили огибающую  $f_+$ ,

$$f = 2 \operatorname{Re} (f_+(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z)),$$

предполагая, что в Фурье-представлении  $f_{\omega, k}$  имеет узкие максимумы там же, где и  $E_{\omega, k}$ . При получении уравнения (13.8a) мы пользовались соотношениями типа

$$\begin{aligned} \partial_z e^{ik_0 z} \Phi(z) &= e^{ik_0 z} (ik_0 + \partial_z) \Phi(z), \\ \beta(i\partial_t) e^{-i\omega_0 t} \Phi(t) &= e^{-i\omega_0 t} \beta(\omega_0 + i\partial_t) \Phi(t), \\ \Phi(t - \tau) &= e^{-\tau \partial_t} \Phi(t). \end{aligned}$$

В силу узости спектральной ширины волнового пакета, производные по времени и координате в (13.8a) следует воспринимать как малые поправки к  $\omega_0$  и  $k_0$  соответственно.

Разложимся до первого порядка по этим поправкам и положим внешний источник нулём,  $f = 0$ . В результате получим уравнение

$$(v_g \partial_z + \partial_t) \Phi(t, z) = 0.$$

Уравнение удовлетворяется, если огибающая зависит от времени и координаты только через комбинацию  $z - v_g t$ , то есть  $\Phi = \Phi(z - v_g t)$ . Таким образом, в этом, первом, приближении мы установили, что волновой пакет движется вправо со групповой скоростью  $v_g$  (13.3c).

Тем не менее, сделанное приближение не улавливает изменения формы огибающей по мере распространения волнового пакета. Поэтому наша цель — переписать волновое уравнение (13.8a) в таком виде, который был бы удобен для описания эволюции волнового пакета. Для этого от лабораторной системы координат  $\{t, z\}$  имеет смысл перейти в такую систему координат, у которой одной из координат является комбинация  $z - v_g t$ ; так

мы будем рассматривать волновые пакеты, двигающиеся ‘в право’, то есть в сторону увеличения координаты  $z$  и исключим их равномерное движение с групповой скоростью  $v_g$ . Вторая координата может быть выбрана в виде суммы исходных координат  $z, t$  с произвольными коэффициентами, конкретный выбор которых зависит от физической постановки задачи. Мы рассмотрим два варианта такого выбора: *сопровождающую систему координат*, см. Пункт 13-1.2.2, и *лабораторную запаздывающую систему координат*, см. Пункт 13-1.2.1.

### 13-1.2.1 Переход в лабораторную запаздывающую систему координат

Лабораторная запаздывающая система координат  $\{z_{\text{new}}, t_{\text{ret}}\}$  определяется согласно равенствам:

$$t_{\text{ret}} = t - z/v_g, \quad z_{\text{new}} = z. \quad (13.8b)$$

Смысл введённых новых координат следующий. Мы фиксируем положение приёмника, иными словами, координату  $z_{\text{new}}$ . Время же мы начинаем отсчитывать не от абсолютного значения, а от момента, когда в точку расположения приёмника придёт импульс, распространяющийся со скоростью  $v_g$  и пущенный из начала координат в нулевой момент времени по абсолютному его отсчёту. В итоге получаем, что форма волнового пакета определяется зависимостью огибающей от  $t_{\text{ret}}$  при фиксированном  $z_{\text{new}}$ , тогда как его эволюция происходит с ростом координаты  $z_{\text{new}}$ . Стоит также заметить, что при выводе уравнения типа (13.8f), описывающего эволюцию волнового пакета, удобно записывать закон дисперсии в виде  $\beta = \beta(\omega)$ .

При такой замене переменных частные производные по  $z_{\text{new}}$  и  $t$  преобразуются по закону

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}. \quad (13.8c)$$

Переищем (13.8a) в лабораторной запаздывающей системе координат, разложившись до второго порядка малости по ширине волнового пакета:

$$\left( -2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} + k_0 \beta_2 \left( \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \right)^2 + \dots \right) \Phi = -f_+, \quad (13.8d)$$

где многоточием обозначены вклады, пропорциональные перекрёстной производной по  $z_{\text{new}}, t_{\text{ret}}$  и второй производной по  $z_{\text{new}}$ .

### Характерное значение частных производных по координате и запаздывающему времени.

Характерная величина производной по времени оценивается как

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \sim \Delta\omega \sim v_g \Delta k.$$

Переход от простого времени к запаздывающему приводит к тому, что в волновом уравнении на  $\Phi_{\omega, k}$  исключается первая производная по времени, тогда как первая производная по координате  $z$  не исчезает. Вследствие этого, оценкой для производной по координате является

$$v_g \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} \sim \frac{1}{v_g} \left( \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \right)^2 \sim \frac{\Delta k}{k_0} v_g \Delta k \ll \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}. \quad (13.8e)$$

### Уравнение на форму пакета в лабораторной запаздывающей системе отсчёта.

Таким образом, уравнение на огибающую в лабораторной запаздывающей системе отсчёта приобретает вид уравнения Шредингера:

$$\left( -i\partial_z + \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \right) \Phi = -\frac{1}{2k_0} f_+. \quad (13.8f)$$

При получении (13.8f) мы пренебрегли в (13.8d) высшими поправками по ширине импульса в соответствии с оценкой (13.8e) (эти поправки были уже скрыты многоточием). Мы также опустили индексы ‘new’ и ‘ret’ у координаты и запаздывающего времени.

### 13-1.2.2 Сопровождающая (движущаяся) система координат

Получим уравнение на огибающую в сопровождающей системе координат, в которой одной из координат является  $z_{\text{rel}} = z - v_g t$ , а другой координатой —  $t$ .

Сопровождающая система координат  $\{t_{\text{new}}, z_{\text{rel}}\}$

$$t_{\text{new}} = t, \quad z_{\text{rel}} = z - v_g t = -v_g t_{\text{ret}}$$

является более геометрически понятной: в этой системе координат мы наблюдаем изменение со временем пространственной структуры волнового пакета, двигаясь вместе с пакетом с групповой скоростью  $v_g$ . При использовании сопровождающей системы координат, наоборот, удобно записывать закон дисперсии в виде  $\omega = \omega(\beta)$ . Вторые производные преобразуются по правилам

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{new}}} - v_g \frac{\partial}{\partial z_{\text{rel}}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_{\text{rel}}}.$$

Продельвая ту же процедуру, что и в Пункте 13-1.2.1, приходим к уравнению

$$\left( -i\partial_t + \frac{v_g^3 \beta_2}{2} \partial_z^2 \right) \Phi = -\frac{v_g}{2k_0} f_+, \quad (13.8g)$$

аналогичному уравнению (13.8f). В главном порядке по ширине пакета, как мы видим, уравнения (13.8f, 13.8g) отличаются с точностью до простых замен  $v_g t_{\text{new}} \leftrightarrow z_{\text{new}}$  и  $v_g t_{\text{ret}} \leftrightarrow -z_{\text{rel}}$ .

### 13-1.3 Нелинейное уравнение Шредингера

Нелинейное уравнение Шредингера в оптоволокнах имеет вид

$$\left(-i\partial_z + \frac{\beta_2}{2}\partial_t^2\right)\Phi = \gamma|\Phi|^2\Phi, \quad \Phi = \Phi(z, t). \quad (13.8h)$$

#### 13-1.3.1 Линейное уравнение со второй дисперсией

Если пренебречь нелинейностью, то уравнение (13.8f) сведётся к

$$i\partial_z\Phi = \frac{\beta_2}{2}\partial_t^2\Phi \quad (13.8i)$$

Дисперсия называется нормальной (normal dispersion), если  $\beta_2 > 0$ , и аномальной, если  $\beta_2 < 0$ .

Наличие ненулевой дисперсии приводит к расплыванию волнового пакета. Покажем это на частном примере. Пусть огибающая имеет гауссов вид,

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(z)}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma(z)}\right] \quad (13.8j)$$

Используя (13.8i) получаем уравнение на величину  $\sigma$ ,

$$\frac{d\sigma}{dz} = i\beta_2. \quad (13.8k)$$

Ширина волнового пакета равна  $|\sigma|/\sqrt{\text{Re}\sigma}$ , и согласно уравнению на больших временах начинает расти линейно со временем.

#### 13-1.3.2 Канонический вид НУШ

Подходящей линейной заменой переменных полученное уравнение (13.8f) может быть приведено к каноническому виду

$$i\partial_z\Phi = -\frac{1}{2}\partial_t^2\Phi - |\Phi|^2\Phi \quad (13.8l)$$

при условии аномальности дисперсии,  $\beta_2 < 0$  (фокусирующее НУШ). Если же дисперсия нормальна,  $\beta_2 > 0$  (дефокусирующее НУШ), то знак перед дисперсионным слагаемым в (13.8l) следует заменить на обратный:

$$i\partial_z\Phi = -\frac{1}{2}\partial_t^2\Phi + |\Phi|^2\Phi \quad (13.8m)$$

#### 13-1.3.3 Дисперсия плоских волн с учётом нелинейности

Рассмотрим простейшие эффекты, возникающие в присутствии второй дисперсии и керровской нелинейности. В этом случае уравнение на огибающую  $\Phi$  записывается в виде

$$\left(i\partial_z - \frac{\beta_2}{2}\partial_t^2\right)\Phi = -\gamma|\Phi|^2\Phi \quad (13.8n)$$

Рассмотрим непрерывную волну (cw – continuous wave), в которой огибающая

$$\Phi_{\text{cw}}(z, t) = \sqrt{P} \exp[ikz - i\omega t]. \quad (13.8o)$$

где мощность  $P$  является константой. Подставляя непрерывную волну (13.8o) в уравнение (13.8n), получаем связь между параметрами волны

$$k = \frac{\beta_2}{2}\omega^2 + \gamma P. \quad (13.8p)$$

#### 13-1.3.4 Взаимное ослабление нелинейности и второй дисперсией.

Проанализируем качественно нелинейное уравнение Шредингера (13.8f) на предмет влияния второй дисперсии и нелинейности на расплывание волнового пакета. Как было показано ранее, расплывание импульса происходит из-за того, что разные частотные компоненты импульса приобретают разную фазу при движении вдоль оптоволокна. Здесь мы показываем, что нелинейность может привести к подавлению набега разности фаз.

Предположим простую форму импульса во временном  $\Phi(t)$  и в частотном  $\Phi(\omega)$  пространстве – мы считаем, что это функцию, имеющие один максимум в нуле и просто убывающие при удалении от этого максимума. Тогда схематически (13.8f) в Фурье-представлении можно переписать в виде

$$ik_0\partial_z\Phi \sim [\beta_2\omega^2/2 + (*+*\omega^2)]\Phi.$$

Звёздочками обозначены первые коэффициенты разложения оператора  $\gamma|\Phi|^2$  по частоте в частотном представлении, которые являются положительными если  $\gamma > 0$ . Таким образом, при правильном подборе формы и амплитуды импульса можно добиться того, чтобы общий коэффициент при  $\omega^2$  был равен нулю. Это и означает компенсацию второй дисперсии нелинейностью.

#### 13-1.3.5 Односолитонные решения

Решением уравнения (13.8l) является, в частности, односолитонное решение

$$\Phi = \frac{\eta \exp\{i(\eta^2 - v^2)z/2 + ivt + i\varphi_0\}}{\cosh(\eta(t - vz - t_0))}. \quad (13.8q)$$

Параметр  $v$  можно назвать скоростью солитона, а параметр  $\eta$  определяет ширину и высоту солитона.

## 13-1.4 Задачи

### 13-1.4.1 Расплывание волнового пакета

### 13-1.4.2 Модуляционная неустойчивость

• **Задача 1:** Рассмотрите нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) (13.8h), в котором коэффициент нелинейности положителен,  $\gamma > 0$ , а коэффициент второй дисперсии  $\beta_2$  может быть как положительным, так и отрицательным.

• Плоские волны  $\exp(ikz - i\omega t)$  по-прежнему являются решением уравнения, как и в линейном пределе. Исследуйте, как зависит дисперсия плоских волн  $k(\omega, P)$  в зависимости от волнового числа и интенсивности  $P = |\Phi|^2$ .

• Рассмотрите устойчивость плоских волн на плоскости двух параметров — второй дисперсии  $\beta_2$  и интенсивности волны  $P$ . Для этого надо рассмотреть начальные условия  $\Phi_{\omega, P}(1 + \epsilon)$ , где  $\Phi_{\omega, P}(z, t)$  — решение для плоской волны, а  $\epsilon(z, t)$  — произвольная малая добавка; после этого надо установить линейризованное уравнение на добавку  $\epsilon$  и рассмотреть её эволюцию по координате  $z$ . При каком соотношении коэффициентов хроматической дисперсии  $\beta_2$  и нелинейности  $\gamma$  плоская волна оказывается устойчивой? Если это условие не выполняется, то в каких областях волна оказывается устойчивой (т.е. при любом начальном  $\epsilon_0(t)$  поправка  $\epsilon(z, t)$  не растёт по амплитуде со временем), а в каких нет? Нарисуйте эти области на графике.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

continuous wave (cw), 104

group delay parameter,  $D$ , 101

helicity, 16

Бюргерса уравнение, 42

Запаздывающее время, 103

Кориолиса сила, 54

Навье-Стокса уравнение, 13

Хопфа уравнение, 36

Эйлера уравнение, 11

волна

ударная, 37

волновой луч, 33

волновой пакет, 101

вязкий тензор напряжений, **13**

вязкости коэффициент

динамический, 13

кинематический, 16

геострофический баланс, 57

дисперсия

аномальная, 101

нормальная, 101

диффузия

турбулентная, 84

завихренность, **11**

линия тока, 9

поверхность разрыва, 37

присоединённая масса

тензор, 90

система координат

лабораторная запаздывающая, 103

сопровождающая, 103

спиральность, 16

тензор напряжений, 10

течение

бароклинное, 19

геострофическое, 57

изэнтропическое, 19

потенциальное, 20

стационарное, 19

уравнение

непрерывности, 10

флуктуация

оптимальная, 98

функция

автокорреляционная, 98

стационарная случайная, 98

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## Литература

### Основная литература по гидродинамике

- Falkovich, G. (2018). *Fluid mechanics: A Short Course for Physicists* (2nd). Cambridge University Press.
- Frisch, U. (1995). *Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov*. University Press, Cambridge.
- Ландау, Л. Д., & Лифшиц, Е. М. (1986). *Теоретическая физика, том VI. Гидродинамика*. Наука.
- Хашпель, Д., & Бреннер, Г. (1976). *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*. МИР.

### Дополнительная литература по гидродинамике

- Dzyaloshinskii, I., & Volovick, G. (1980). Poisson brackets in condensed matter physics. *Annals of Physics*, 125, 67–97. [URL](#).
- Gouin, H., & Ruggeri, T. (2012). A consistent thermodynamical model of incompressible media as limit case of quasi-thermal-incompressible materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(6), 688–693.
- Lohse, D., & Shishkina, O. (2024). Ultimate Rayleigh-Bénard turbulence. *Reviews of Modern Physics*, 96(3), 035001. [URL](#).
- Nazarenko, S., & Lukaschuk, S. (2016). Wave turbulence on water surface. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 7, 61–88.
- Vallis, G. K. (2017). *Atmospheric and oceanic fluid dynamics* (2nd). Cambridge University Press. [URL](#).
- Zakharov, V., L'vov, V., & Falkovich, G. (1992). *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*. Springer-Verlag.
- Zhao, K., & Liu, P. L.-F. (2022). On Stokes wave solutions. *Proceedings of the Royal Society A*, 478(2258), 20210732.
- Зарембо, Л., & Красильников, В. (1966). *Введение в нелинейную акустику. Звуковые и ультразвуковые волны большой интенсивности*. Наука.
- Ландау, Л. Д., & Лифшиц, Е. М. (1995). *Теоретическая физика, том V. Статистическая физика, часть 1* (Издание 4-е). Наука-Физматлит.
- Лебедев, В. В. (2004). *Флуктуационные эффекты в макрофизике*. МЦНМО.
- Руденко, О. В., & Солуян, С. (1975). *Теоретические основы нелинейной акустики*. Наука.
- Рытов, С. (1976). *Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы*. Наука.

### Оригинальные работы

- Batchelor, G. (1950). The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 76(328), 133–146.
- Boussinesq, J. (1903). *Théorie analytique de la Chaleur*. Gauthier-Villars. [URL](#).
- Cantwell, B. J. (2019). A universal velocity profile for smooth wall pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 878, 834–874.
- Chen, X.-B. (2006). The set-down in the second-order Stokes' waves. *International Conference on Hydrodynamics, Italy*, 179–85. [URL](#).
- de Kármán, T., & Howarth, L. (1938). On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 164(917), 192–215.
- Dukhin, A. S., & Goetz, P. J. (2009). Bulk viscosity and compressibility measurement using acoustic spectroscopy. *The Journal of chemical physics*, 130(12).
- Dysthe, K. B. (1979). Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 369(1736), 105–114.
- Greenspan, H., & Howard, L. (1963). On a time-dependent motion of a rotating fluid. *Journal of fluid mechanics*, 17(3), 385–404.
- Hill, R. J., & Wilczak, J. M. (1995). Pressure structure functions and spectra for locally isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 296, 247–269.

- Jiménez, J. (2018). Coherent structures in wall-bounded turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 842.
- Lamb, H. (1877). On the conditions for steady motion of a fluid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1), 91–93.
- Liu, Y., & Yu, X. (2022). General formulation of drag force on assemblage of spherical particles in fluids: A critical review and a new empirical formula. *Physics of Fluids*, 34(6).
- Longuet-Higgins, M. S., & Stewart, R. (1962). Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to ‘surf beats’. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(4), 481–504. [URL](#).
- Luchini, P. (2017). Universality of the turbulent velocity profile. *Physical review letters*, 118(22), 224501.
- Malkus, W. V. (1954). The heat transport and spectrum of thermal turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 225(1161), 196–212.
- Mandelbrot, B. B. (1991). Random Multifractals: Negative Dimensions and the Resulting Limitations of the Thermodynamic Formalism. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 434, 79–88.
- Oberbeck, A. (1879). Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik*, 243(6), 271–292. [URL](#).
- Richardson, L. F. (1926). Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 110(756), 709–737.
- Roberts, P., & Donnelly, R. (1970). Dynamics of vortex rings. *Physics Letters A*, 31(3), 137–138.
- Sharma, B., & Kumar, R. (2023). A brief introduction to bulk viscosity of fluids. *arXiv preprint arXiv:2303.08400*.
- Stokes, G. G. (1847). On the theory of oscillatory waves. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, 441–455.
- Watanabe, T., & Gotoh, T. (2004). Statistics of a passive scalar in homogeneous turbulence. *New Journal of Physics*, 6(1), 40. [URL](#).
- Westervelt, P. J. (1953). The theory of steady rotational flow generated by a sound field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 25(1), 60–67.
- Обухов, А. (1949). Структура температурного поля в турбулентном потоке. *Известия Академии наук СССР. Серия географическая и геофизическая*, 13, 58–69.
- Сорокин, В. (1954). О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. *Прикладная математика и механика*, 18, 197–204. [URL](#).
- Хинчин, А. Я. (1938). Теория корреляции стационарных стохастических процессов. *Успехи математических наук*, 5, 42–51.
- Яглом, А. М. (1949). О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке. *Доклады Академии наук СССР*, 69, 743–746. [URL](#).

# Оглавление

Глава 1	
<b>Программа курса “Гидродинамика”</b>	2
Темы занятий по неделям: краткий свод тем .....	2
Неделя 1.....	3
Неделя 2.....	4
Неделя 3.....	4
Неделя 4.....	5
Неделя 5.....	5
Неделя 6.....	6
Неделя 7.....	7
Неделя 8.....	7
Неделя 9.....	8
Неделя 10.....	8
Неделя 11.....	9
Глава 2	
<b>Течение непрерывных сред</b>	10
2-1 Поток массы и импульса в непрерывной среде .....	10
2-1.1 Эйлерово и лагранжево описание непрерывной среды .....	10
2-1.2 Поток массы .....	11
2-1.3 Поток импульса .....	11
2-2 Течение идеальной жидкости .....	12
2-2.1 Уравнения течения .....	12
2-2.2 Уравнение переноса энергии .....	13
2-3 Течение вязкой жидкости.....	14
2-3.1 Уравнение Навье-Стокса .....	14
2-3.2 Уравнение переноса энергии .....	15
2-4 Гидростатика .....	16
2-5 Несжимаемое изотермическое течение.....	17
2-5.1 Сохранение циркуляции скорости .....	17
2-5.2 Течение в ограниченной области .....	18
2-6 Квази-несжимаемое термическое течение.....	19
2-7 Частные виды течений и модели жидкости.....	20
2-7.1 Изэнтропическое течение и баротропная жидкость .....	20
2-7.2 Стационарное течение .....	21
2-7.3 Потенциальное изэнтропийное (баротропное) течение .....	21
2-7.4 Задачи .....	22
Глава 3	
<b>Течение при малых числах Рейнольдса</b>	23

3-1	Течение при малых числах Рейнольдса .....	23
3-1.1	Стационарное уравнение Стокса .....	23
3-2	Обтекание твёрдого шарика .....	25
3-2.1	Уточнение Осена формулы Стокса .....	26
3-2.2	Задачи .....	26
3-3	Аксиально симметричное течение.....	27
3-3.1	Обтекание эллипсоида .....	27
3-4	Суспензии .....	27
3-4.1	Тензор напряжений .....	28
3-4.2	Скорость диссипации энергии .....	29
3-4.3	Разбавленные суспензии .....	29
3-5	Вязкий пограничный слой.....	30
3-5.1	Течение в плоском канале, переменное во времени .....	30
3-5.2	Задачи .....	31
Глава 4		
<b>Звуковые волны</b>		<b>32</b>
4-1	Звуковые волны в однородной среде.....	32
4-1.1	Гамильтоново описание звуковых волн .....	32
4-2	Линейное приближение для звуковых волн.....	34
4-2.1	Локальные средние в волновых пакетах .....	34
4-2.2	Задачи .....	35
4-3	Линейное затухание звука .....	37
4-3.1	Задачи .....	38
4-4	Геометрическая акустика .....	38
4-4.1	Энергия и импульс волны .....	39
4-4.2	Монохроматическая волна .....	39
4-4.3	Задачи .....	40
4-5	Распространение звука в движущейся среде.....	40
4-5.1	Приближение геометрической акустики .....	40
4-5.2	Распространение звуковых лучей .....	41
4-5.3	Задачи .....	43
4-6	Акустические течения .....	44
4-6.1	Нелинейность .....	45
Глава 5		
<b>Одномерное течение</b>		<b>47</b>
5-1	Одномерное течение жидкости .....	47
5-1.1	Бегущая нелинейная волна .....	47
5-1.2	Предел малых амплитуд .....	48
5-2	Ударная волна .....	49
5-2.1	Адиабата Гюгонио .....	50
5-2.2	Слабая ударная волна .....	51
5-2.3	Скорости перед и за фронтом .....	51
5-2.4	Идеальный газ .....	52
5-3	Образование ударных волн в плоской звуковой волне.....	52
5-3.1	Треугольный импульс .....	53
5-3.2	Задачи .....	54
5-4	Диссипативные процессы в одномерном течении .....	54
5-4.1	Слабая ударная волна .....	54
5-4.2	Эволюция исходно монохроматической волны .....	56
5-5	Квази-одномерное течение через сопло .....	56

5-5.1	Свободное стационарное течение . . . . .	56
5-5.2	Течение через сопло . . . . .	57
5-5.3	Задачи . . . . .	58
<b>Глава 6</b>		
<b>Двумерное течение</b>		<b>60</b>
6-1	Двумерное течение . . . . .	60
6-1.1	Идеальная двумерная гидродинамика . . . . .	60
<b>Глава 7</b>		
<b>Волны на поверхности жидкости</b>		<b>61</b>
7-1	Свободная поверхность жидкости . . . . .	61
7-1.1	Форма поверхности . . . . .	61
7-1.2	Граничные условия . . . . .	62
7-1.3	Проводящая жидкость в электрическом поле . . . . .	63
7-1.4	Задачи . . . . .	64
7-2	Гравитационно-капиллярные волны на поверхности идеальной жидкости . . . . .	64
7-2.1	Гамильтонов формализм . . . . .	65
7-3	Линейные волны на поверхности идеальной жидкости . . . . .	65
7-3.1	Глубокая вода, гравитационно-капиллярные волны . . . . .	66
7-3.2	Мелкая вода, гравитационные волны . . . . .	67
7-3.3	Задачи . . . . .	67
7-4	Средние величины в линейных волнах . . . . .	69
7-4.1	Дрейф Стокса . . . . .	70
7-4.2	Задачи . . . . .	71
7-5	Нелинейные эффекты в распространении волн . . . . .	71
7-5.1	Медленные течения, вызванные движениями волновых пакетов . . . . .	72
7-5.2	Граница применимости приближения слабо нелинейных волн . . . . .	73
7-5.3	Плоская периодическая слабо нелинейная гравитационная волна на глубокой воде . . . . .	74
7-5.4	Распространение волнового пакета . . . . .	75
7-5.5	Гамильтониан слабо нелинейных волн . . . . .	75
7-5.6	Задачи . . . . .	75
7-6	Волны на поверхности слабо вязкой жидкости . . . . .	76
7-6.1	Затухание волн на глубокой воде . . . . .	76
7-6.2	Задачи . . . . .	77
<b>Глава 8</b>		
<b>Течение вращающейся жидкости</b>		<b>78</b>
8-1	Уравнения течения вращающейся жидкости . . . . .	78
8-1.1	Несжимаемая жидкость . . . . .	78
8-2	Инерционные волны . . . . .	79
8-2.1	Разложение поля скорости по волнам с круговой поляризацией . . . . .	79
8-2.2	Линеаризованная динамика . . . . .	80
8-2.3	Волновое уравнение и его решение в цилиндрических координатах . . . . .	81
8-2.4	Квадратичные средние . . . . .	81
8-2.5	Задачи . . . . .	81
8-3	Квази-двумерное течение . . . . .	82
8-3.1	Задачи . . . . .	83
8-4	Влияние стенок на течение вращающейся жидкости . . . . .	83
8-4.1	Горизонтальные стенки . . . . .	83
8-4.2	Задачи . . . . .	85

**Часть I****ТЕЧЕНИЯ С ХАОТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ**

Глава 9		
<b>Случайные потоки жидкости</b>		<b>87</b>
9-1	Статистическое описание поля скорости в случайных потоках.....	87
9-1.1	Корреляционные функции . . . . .	87
9-2	Парная корреляционная функция . . . . .	88
9-2.1	Парная корреляционная функция . . . . .	88
9-2.2	Разделение поля скорости по масштабам . . . . .	90
9-2.3	Статистика поля скорости на малых масштабах . . . . .	90
9-2.4	Задачи . . . . .	91
9-3	Корреляционная функция третьего порядка . . . . .	92
9-3.1	Изотропная статистика . . . . .	92
9-3.2	Двумерное поле скорости . . . . .	93
9-4	Трёхмерный турбулентный поток.....	93
9-4.1	Размерные оценки для турбулентного каскада . . . . .	93
9-4.2	Инерционный интервал . . . . .	94
9-5	Точные результаты в теории развитой трёх-мерной турбулентности.....	95
9-5.1	Соотношение Кармана-Ховарда-Монина . . . . .	95
9-5.2	Изотропная турбулентность . . . . .	96
9-5.3	Задачи . . . . .	97
9-6	Двумерный статистически изотропный турбулентный поток.....	98
9-6.1	Энстрофия . . . . .	98
9-6.2	Прямой и обратный каскады . . . . .	98
9-7	Случайное течение на малых масштабах.....	100
9-7.1	Модель коротко-коррелированного во времени и статистически изотропного поля скорости . . . . .	100
9-8	Турбулентное течение, имеющее среднюю сдвиговую компоненту.....	101
9-8.1	Логарифмический профиль скоростей . . . . .	101
9-8.2	Турбулентное течение в трубе . . . . .	102
9-8.3	Задачи . . . . .	103
Глава 10		
<b>Перемешивание</b>		<b>104</b>
10-1	Перемешивание . . . . .	104
10-2	Перемешивание в гладком поле скорости.....	105
10-2.1	Перемешивание в постоянном сдвиговом течении . . . . .	106
10-3	Парная корреляционная функция пассивного скаляра.....	107
10-3.1	Предельные поведения процесса перемешивания . . . . .	109
10-3.2	Каскады скаляра в турбулентных потоках . . . . .	109
10-4	Тепловая конвекция в сосуде.....	110
10-4.1	Режим с ламинарным кинетическим пограничным слоем . . . . .	111
Глава 11		
<b>Обтекание тел при больших числах Рейнольдса</b>		<b>113</b>
11-1	Потенциальное обтекание тела.....	113
11-1.1	Присоединённая масса . . . . .	114
11-1.2	Нелокальность в гидродинамике несжимаемой жидкости . . . . .	115
11-1.3	Квази-импульс ограниченного в пространстве течения . . . . .	115
11-1.4	Обтекание шара . . . . .	116

11-1.5	Задачи	116
11-2	Кольцевой вихрь	117
11-3	Вихревой след	117
11-3.1	Сила сопротивления	118
11-3.2	Турбулентный след	119
11-3.3	Задачи	119

## Часть II

### ПРИЛОЖЕНИЯ

#### Глава 12

##### Математические аспекты теории статистики

121

12-1	Одномерная случайная величина	121
12-1.1	Характеристическая функция	121
12-2	Сумма независимых одинаково распределённых случайных величин	122
12-2.1	Характеристическая функция	122
12-2.2	Описание флуктуаций для суммы многих случайных величин	122
12-2.3	Оптимальные флуктуации	123
12-3	Моменты совместно распределённых гауссовых случайных величин	124
12-4	Флуктуации случайной величины: автокорреляционная функция	124
12-4.1	Теорема Винера-Хинчина	124
12-4.2	Корреляционная функция в формализме квантовой механики	125

#### Глава 13

##### Нелинейные уравнения гидродинамического типа

127

13-1	Нелинейное уравнение Шредингера	127
13-1.1	Выделение огибающей	127
13-1.2	Уравнение на огибающую	128
13-1.3	Нелинейное уравнение Шредингера	130
13-1.4	Задачи	131

### ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

132

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

133

Литература	133
Основная литература по гидродинамике	133
Дополнительная литература по гидродинамике	133
Оригинальные работы	133